CONSTANTINO MARCOS
JACINTO MARTINEZ

MATEMATICAS

5.°

MATEMATICAS

CONSTANTINO MARCOS, S. M.
LICENCIADO EN CIENCIAS FISICAS

JACINTO MARTINEZ, S. M.
DOCTOR EN CIENCIAS EXACTAS

MATEMATICAS

QUINTO CURSO

Aprobado el 23 de Octubre de 1957
Boletín Oficial del Ministerio de 4-XI-57

PRECIO: 60 ptas.
Año 1960

EDICIONES S. M.
General Tabanera, 37 — MADRID (19)

© Copyright by.
EDICIONES S. M. — MADRID

N.º de Registro: 6487. — 60

Depósito legal: BU-208. — 1960

Derechos reservados

IMPRESO EN ESPAÑA

Imprenta de Aldecoa. — Burgos 17987

PROLOGO

Al escribir este libro de MATEMÁTICAS *para Quinto Curso de Bachillerato, hemos procurado que sea claro, conciso, formativo y sumamente práctico.*

Los ejercicios y problemas siguen inmediatamente a cada lección, de modo que el alumno se verá obligado a caminar lentamente en la adquisición de la teoría expuesta en el texto, haciéndolo con paso seguro y dejando bien sentados los conocimientos anteriormente adquiridos.

Las frecuentes aplicaciones del cálculo a problemas de la vida práctica harán ver al alumno el aspecto útil de las MATEMÁTICAS, *lo cual será un gran estímulo para él.*

Insístase en esta parte práctica, multipliquense los ejemplos tomados de la vida diaria, y, a ser posible, hágase al aire libre ejercicios de medición de ángulos y triángulos, cálculo de alturas y distancias, etcétera.

El cuestionario oficial señala que hay que hacer el "desarrollo por el método racional de un capítulo de la Aritmética". Nos ha parecido que nada mejor para ello que exponer la teoría de los determinantes y su aplicación a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, que tanto interés despierta en nuestros estudiantes.

En cuanto al "desarrollo racional de un capítulo de la Geometría", hemos tratado de las relaciones métricas en los triángulos oblicuángulos, en los polígonos regulares y en la circunferencia.

En esta edición se han añadido buena cantidad de problemas propuestos durante estos últimos años en el examen de Grado superior, esperando serán de gran utilidad para todos.

Agradecemos muy cordialmente a don José Luis Sánchez-Martín su valiosa colaboración en la redacción de este libro. Deseosos de que resulte útil y provechoso para los alumnos, recibiremos complacidos cuantas observaciones e indicaciones se nos quiera hacer, para su mejora en sucesivas ediciones.

LOS AUTORES

INDICE

		Págs.
LECCIÓN	1.ª — Variaciones y permutaciones	1
"	2.ª — Combinaciones	7
"	3.ª — Potencia m-sima de un binomio	12
"	4.ª — Probabilidad y promedios	20
"	5.ª — Iniciación al método racional	32
"	6.ª — Determinantes	37
"	7.ª — Propiedades de los determinantes	44
"	8.ª — Sistemas de ecuaciones lineales. Regla de Cramer	50
"	9.ª — Logaritmos	57
"	10.ª — Logaritmos de los resultados operativos	64
"	11.ª — Ecuaciones exponenciales y logarítmicas	70
"	12.ª — Progresiones aritméticas	75
"	13.ª — Progresiones geométricas	81
"	14.ª — Interés simple y compuesto	92
"	15.ª — Anualidades	97
"	16.ª — Método de resolución de problemas	102
"	17.ª — Relaciones métricas en un triángulo oblicuángulo. Lugares geométricos	121
"	18.ª — Relaciones métricas en la circunferencia y en los polígonos regulares	126
"	19.ª — Funciones y gráficas	137
"	20.ª — Razones trigonométricas	154
"	21. — Variación de las razones trigonométricas	166
"	22.ª — Reducción de las razones al primer cuadrante	175
"	23.ª — Relaciones de adición de las funciones goniométricas	183
"	24.ª — Identidades y ecuaciones trigonométricas	191
"	25.ª — Resolución de triángulos rectángulos	199

Págs.

LECCIÓN 26.ª — Primero y segundo casos de resolución de triángulos oblicuángulos 212
" 27.ª — Tercero y cuarto casos de resolución de triángulos oblicuángulos 219
" 28.ª — Fórmulas del área de un triángulo 229
" 29.ª — Números complejos y vectores 233
" 30.ª — Adición y sustracción de números complejos y vectores. 239
" 31.ª — Multiplicación y división de números complejos 246
" 32.ª — Potencias y raíces de numeros complejos 251

1

Variaciones y permutaciones

1. **Cálculo combinatorio.** — El *cálculo combinatorio* tiene por objeto el estudio de las propiedades de los diversos grupos que se pueden formar, según una ley dada, con un número finito de *elementos* de naturaleza cuaquiera; en *particular,* se propone: 1.°, *hallar la regla que permita formar todos estos grupos;* 2.°, *calcular su número.*

Los elementos dados los designaremos con las letras del alfabeto (a, b, c, ... h, k, l), o bien con una sola letra afectada de un subíndice (a_1, a_2, ..., a_n).

Las clases de grupos más importantes que pueden formarse son las *variaciones,* las *permutaciones* y las *combinaciones.*

2. **Variaciones: Definición.** — *Se llaman variaciones* n-*arias de* m *elementos distintos, a los diferentes grupos que pueden formarse con los* m *elementos dados tomados de* n *en* n, *de modo que cada dos grupos difieran entre sí, ya por la naturaleza de algún elemento, ya por el orden de sucesión de los mismos.*

El número de variaciones de *m* elementos tomados *n* a *n,* lo designaremos por el símbolo V_m^n, o bien $V_{m,\,n}$.

3. **Problema 1.°: Ley de formación.** — Supongamos que nos dan *m* elementos: a, b, c, d, ..., h, k, l; evidentemente sus variaciones monarias son los *m* elementos dados.

Para formar las *binarias* agregaremos a la derecha de cada *monaria* uno a uno los m — 1 elementos que no entran en ella, así:

$$
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{llllll}
a\,b, & a\,c, & a\,d, & \ldots & a\,k, & a\,l,\\
b\,a, & b\,c, & b\,d, & \ldots & b\,k, & b\,l,\\
c\,a, & c\,b, & c\,d, & \ldots & c\,k, & c\,l,\\
\vdots & & & & & \\
\vdots & & & & & \\
k\,a, & k\,b, & k\,d, & \ldots & k\,h, & k\,l,\\
l\,a, & l\,b, & l\,c, & \ldots & l\,h, & l\,k.
\end{array}\right\} m \\
\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{m-1}
\end{array}\right. \qquad (1)
$$

Como cada grupo monario da m — 1 binarios, tendremos en total (m — 1) grupos binarios.

Para formar las *ternarias,* agreguemos a la derecha de cada *binaria* uno a uno los m — 2 elementos que no entran en ella; así:

$$
\begin{array}{c}
\\
m(m-1)\left\{\begin{array}{l}
\overbrace{\hspace{6em}}^{m-2} \\
a\,b\,c,\quad a\,b\,d,\quad a\,b\,e,\quad \ldots\quad a\,b\,k,\quad a\,b\,l, \\
a\,c\,b,\quad a\,c\,d,\quad a\,c\,e,\quad \ldots\quad a\,c\,k,\quad a\,c\,l, \\
\vdots \\
\vdots \\
l\,h\,a,\quad l\,h\,b,\quad l\,h\,c,\quad \ldots\quad l\,h\,g,\quad l\,h\,k, \\
l\,k\,a,\quad l\,k\,b,\quad l\,k\,c,\quad \ldots\quad l\,k\,g,\quad l\,k\,h.
\end{array}\right.
\end{array}
\qquad (2)
$$

Para formar las n-*arias* agreguemos a la derecha de cada (n — 1) -*aria,* uno a uno, los m — (n — 1) elementos que no entran en ella.

Hay que demostrar ahora que procediendo así, ninguna de las variaciones n-*arias* formadas con los *m* elementos está repetida, y que no se ha omitido ninguna de las variaciones posibles.

1.° *Ninguna se ha repetido,* porque dos variaciones n-arias cualesquiera difieren ya por la naturaleza del último elemento añadido, ya por la variación de orden n — 1 que las dio origen. (Fijarse en lo que sucede, por ejemplo, en las ternarias.)

2.° *No se ha omitido ninguna:* por ejemplo, la a b c ... k l, pues si se le quita el último elemento, *l,* queda una variación de n — 1 elementos, que por hipótesis había sido formada; a esta variación, luego, le hemos añadido sucesivamente cada uno de los m — (n — 1) restantes; luego *l* ha sido añadido y la variación considerada había sido formada.

Luego según esta ley recurrente, para formar las variaciones n-arias, primero se forman las monarias, luego las binarias, después las ternarias, y así hasta llegar a las n-arias.

4. **Problema 2.°: Su número.** — Hemos visto que el número de variaciones monarias formadas con *m* elementos dados es:

$$V_m^1 = m,$$

el de binarias:

$$V_m^2 = m(m-1) = m(m-2+1), \qquad \text{cuadro (1)}$$

el de ternarias:

$$\begin{aligned} V_m^3 &= m(m-1)(m-2) = \\ &= m(m-1)(m-3+1), \end{aligned} \qquad \text{cuadro (2)}$$

Generalizando:

$$\mathbf{V_m^n = m(m-1)(m-2)\ \ldots\ (m-n+1).}$$

Es decir, *el número de variaciones* n-*arias formadas con* m *elementos, es igual al producto de* n *factores enteros consecutivos decrecientes, siendo* m *el primero de ellos.*

Ejemplo 1. — *Obtener las variaciones ternarias con cuatro elementos: a, b, c, d.*

a			b			c			d			
ab	ac	ad	ba	bc	bd	ca	cb	cd	da	db	dc	monarias
abc	acb	adb	bac	bca	bda	cab	cba	cda	dab	dba	dca	binarias
abd	acd	adc	bad	bcd	bdc	cad	cbd	cdb	dac	dbc	dcb	ternarias

Ejemplo 2. — Ocho cartas de una baraja, todas del mismo color: as, rey, caballo, sota, tres, siete, seis y cinco de espadas, pueden colocarse en la mano, tomándolas de 5 en 5, de:

$$V_8^5 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = \mathbf{6720\ maneras\ diferentes.}$$

Ejemplo 3. — Para hallar cuántos números compuestos de dos cifras significativas distintas hay, basta buscar el número de variaciones que se pueden formar con las nueve cifras significativas tomadas de dos en dos; lo que da:

$$V_9^2 = 9 \cdot 8 = \mathbf{72.}$$

Ejemplo 4. — *¿Cuántos números impares de cuatro cifras diferentes se pueden escribir con las cifras* 2, 3, 4, 5, 6, 7?

Solución: Ya que los números pedidos deben ser impares, la cifra de las unidades de cada uno debe ser 3, 5 ó 7. Luego quedan cinco cifras para elegir las tres de la izquierda de cada número, y esto puede hacerse de $V_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ modos diferentes. Esto es, 60 números a los que se pondrá por cifra de las unidades el 3, 5 ó 7. Por lo tanto habrá $60 \cdot 3 = \mathbf{180\ números}$ impares, de cuatro cifras cada uno, que pueden formarse con las seis cifras dadas.

En este cuarto ejemplo se ha tenido en cuenta la siguiente

5. **Nota.** — Si un acto puede realizarse de m maneras diferentes, y otro independiente del primero, puede llevarse a cabo de n modos distintos, entonces el conjunto de los dos actos, en el orden establecido, pueden llevarse a cabo de $m \cdot n$ maneras diferentes. Así, si de Madrid a Burgos puedo ir por cinco caminos distintos, y de Burgos a Pamplona por cuatro caminos diferentes, para ir de Madrid a Pamplona pasando por Burgos podré elegir entre 4 veces 5, o sea, 20 caminos diferentes.

Es claro que este principio puede extenderse al caso en que intervengan más de dos actos.

Ejemplo 1. — *¿Cuántos números de tres cifras pueden formarse con los signos* 1, 2, 3, 5, *si cada signo sólo puede emplearse una vez?*

Solución: La cifra de las centenas puede elegirse de cuatro modos diferentes; la cifra de las decenas puede entonces ser elegida de tres maneras diferentes; finalmente, la cifra de las unidades puede elegirse de dos modos diferentes. Luego podemos formar $4 \cdot 3 \cdot 2 = \mathbf{24\ números.}$

Ejemplo 2. — *¿Cuántos números de tres cifras menores que* 300 *pueden formarse con los signos* 1, 2, 3, 5 *sin que se repitan éstos?*

Solución: La cifra de las centenas puede elegirse de dos modos diferentes (con el 1 ó el 2 solamente, ya que el 3 ó el 5 en este lugar darían un número mayor que 300). La cifra de las decenas puede elegirse entonces de tres modos y la cifra de las unidades de dos. Luego podemos formar $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ **números.**

6. **Permutaciones: Definición.** — *Permutaciones de* m *elementos diferentes son los distintos grupos que pueden formarse entrando en cada uno los* m *elementos dados, difiriendo únicamente en el orden de sucesión de sus elementos.*

Así, las permutaciones que se pueden formar con las tres letras, a, b, c, son:

a b c, a c b, c a b, b a c, b c a, c b a.

7. **Problema 1.°: Ley de formación.** — Según la definición, las permutaciones de m elementos no son más que las variaciones de estos m elementos tomados m a m. Luego la ley de formación es igual en ambas clases de grupos.

Pero puede procederse de modo más breve. Sean, por ejemplo, las cuatro cifras, 1, 2, 3, 4; formemos primero las permutaciones 12 y 21 con las dos primeras. Coloquemos luego el 3 en todos los lugares posibles, empezando por la derecha, y así obtendremos:

$$123 \quad 132 \quad 312 \qquad 213 \quad 231 \quad 321 \tag{3}$$

Colocando el 4 en todos los lugares posibles de cada una de las permutaciones (3), se obtienen así las permutaciones de las cuatro cifras dadas, ordenadas de menor a mayor en cada grupo:

1234	1324	3124	2134	2314	3214
1243	1342	3142	2143	2341	3241
1423	1432	.	.	.	.
4123	4132	.	.	.	.

8. **Problema 2.°: Su número.** — El número de permutaciones de m elementos se designa por P_m.

No siendo las permutaciones de m elementos más que las variaciones de estos m objetos tomados m a m, su número será:

$$P_m = V_m^m = m\,(m-1)\,(m-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

o

$$P_m = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-2)\,(m-1)\,m.$$

Este producto de los m primeros números naturales se llama *factorial m*, y se representa por $m!$ Luego:

$$\mathbf{P_m = m!}$$

Ejemplo 1. — Cinco cartas de una baraja pueden disponerse en la mano de $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = \mathbf{120}$ **maneras** diferentes.

Ejemplo 2. — Doce personas pueden colocarse en una mesa de 12 cubiertos (numerados) de $P_{12} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 11 \cdot 12 = \mathbf{479.001.600}$ **maneras** diferentes Para realizar estas permutaciones, haciendo una por minuto, deberían emplearse 1848 años, dedicando a ello 12 horas por día y 360 días al año (el número $360 \cdot 12 \cdot 60 \cdot 1848$ se descompone según el producto de los factores que entran en P_{12}).

EJERCICIOS

1. ¿De cuántos modos diferentes pueden colocarse 6 libros en una fila de un estante?
2. ¿De cuántos modos diferentes pueden colocarse 8 hombres sobre un banco?
3. ¿Cuántas permutaciones pueden obtenerse con las letras de la palabra *Tajo?* ¿Cuáles de esas permutaciones tienen sentido?
4. ¿Cuántos números de cinco cifras pueden formarse con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, no repitiendo ninguna de ellas en un mismo número?
5. Hallar la suma de los números a que se refiere el ejercicio anterior.
6. Hallar los distintos grupos que pueden formarse con cuatro cifras y cuatro letras, con la condición de que en todos, letras y números vengan alternados.
7. Formados todos los números con las seis cifras 2, 4, 6, 7, 8, 9, de modo que entren todas en cada uno y no se repita ninguna, ¿cuántos de estos números tendrán el 7 para cifra de centenas?
8. ¿Cuántos números podemos escribir con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, de manera que entren todas en cada número y no se repita ninguna? ¿Cuántos de esos números son menores que 54000?
9. Entre los números que pueden formarse con las nueve cifras significativas, entrando todas las cifras en cada número, ¿cuántos hay que tengan por primera cifra el 3, por segunda el 5 y por tercera el 7?
10. ¿De cuántos modos pueden sentarse alrededor de una mesa el patrón, la patrona y 6 huéspedes, si la patrona está siempre a la cabecera de la mesa y el patrón en el extremo opuesto?
11. ¿Cuántos números diferentes de cuatro cifras pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, no repitiendo ninguna de ellas en un mismo número?
12. Comprobar que el número de variaciones de 7 objetos diferentes tomados 7 a 7 da el mismo número que 10 objetos diferentes tomados 4 a 4.
13. ¿Cuántas variaciones se pueden formar con las letras de la palabra *maletín* tomadas 5 a 5?
14. ¿Cuántas variaciones se pueden formar con las letras de la palabra *hipérbola* tomadas 6 a 6, 7 a 7?
15. ¿De cuántos modos diferentes pueden colocarse los jugadores de un equipo de balompié, admitiendo que un defensa y un extremo siempre juegan en la misma posición?
16. Un restaurante tiene 3 clases de sopa, 4 clases de carne y 5 clases de postre. ¿De cuántos modos diferentes puede una persona elegir su menú tomando una clase de sopa, una clase de carne y dos clases de postre, si se tiene en cuenta el orden de éstos?

17. ¿Cuántas banderas tricolores pueden formarse con los siete colores del espectro con la condición de que en todas entre el amarillo y en ninguna pueda figurar el violeta?

18. ¿Cuántos números de tres cifras existen en el sistema decimal que no repiten ninguna cifra? No se tienen en cuenta aquellos cuya primera cifra de la izquierda es cero.

19. ¿De cuántos modos diferentes pueden colocarse en línea recta 10 cantores, si dos de ellos siempre tienen que estar en los extremos?

20. En una exposición de automóviles, ¿de cuántos modos diferentes pueden colocarse en una fila 10 coches tomados 7 a 7?

21. Calcular m sabiendo que $V_m^5 = 6\,V_m^3$.

22. Calcular cuántos números hay de cinco cifras que sean capicúas y que se pueden formar con el 0 y los cuatro primeros números primos, sin repetir cifras en los lugares no simétricos.

23. Con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7, ¿cuántas ordenaciones distintas pueden formarse en que las cifras impares ocupen los lugares impares?

24. Calcular la suma de todos los números de cuatro cifras que se pueden formar con los guarismos 2, 4, 6, 8. En dichos números no debe haber ninguna cifra repetida.

25. Con las letras de la palabra Europa, ¿cuántas ordenaciones distintas pueden hacerse que empiecen y terminen por consonante? ¿Cuántas que empiecen y terminen por vocal?

26. ¿Cuántas ordenaciones distintas pueden formarse con las letras de ELOISA, sin que haya dos consonantes juntas?

27. ¿Cuántos números de cuatro cifras distintas, sin empezar por cero, se pueden escribir con las 0, 1, 2, 3, 4, 5? ¿Cuántas de ellas son múltiplos de 25?

28. ¿Cuántos números distintos de tres cifras pueden formarse con las nueve cifras significativas de modo que en dichos números no haya cifras repetidas? Hallar la suma de dichos números.

29. El número de variaciones quinarias de m elementos es 154440 y el de ternarias 1716. Calcular m.

30. Se suponen ordenadas en sucesión creciente todas las permutaciones que pueden formarse con las cifras 1, 2, 3, 5, 8, 9. ¿Qué lugar ocupa la permutación 598132?

31. Con las letras de la palabra "Málaga" formar todas las permutaciones en las que no haya dos consonantes juntas.

32. Se suponen ordenadas en sucesión creciente todas las permutaciones posibles de las cifras 1, 2, 3, 5, 7, 8. ¿Qué lugar ocupa en la sucesión la permutación 731825?

33. Calcular m para que se verifique:

$$V_{m,2} + V_{m-2,2} + V_{m-4,2} = 98.$$

34. Calcular el valor de x para que se verifique la igualdad:

$$\frac{P_x}{V_{5,3}} = 2.$$

35. Las dos caras de un disco se dividen en 6 sectores iguales. Se desea colocar los sectores con los 7 colores del arco iris, de modo que dos sectores de la misma cara no tengan el mismo color. ¿De cuántos modos es posible la colocación?

36. Un monomio de tres letras, a, b, c, y de exponentes 2, 3, 4, ¿de cuántos modos distintos puede escribirse, teniendo en cuenta el orden de colocación de las letras y el de los exponentes?

2

Combinaciones

9. **Combinaciones: Definición.** — *Combinaciones* n- *arias de* m *elementos distintos son los diferentes grupos que se pueden formar figurando* n *de estos elementos en cada uno, de modo que cada dos grupos difieran por lo menos en la naturaleza de un elemento.*

En las variaciones, los grupos podían diferenciarse por la *naturaleza* o por el *orden* de sus elementos. En las permutaciones sólo por el *orden,* y en las combinaciones tan sólo por la *naturaleza.*

El número de combinaciones n-arias de *m* elementos lo designaremos por C_m^n y también por $\binom{m}{n}$, llamados números *combinatorios y coeficientes binómicos.* Al número *m* se denomina *numerador* del número combinatorio, y al número *n orden* del mismo.

10. **Problema 1.°: Ley de formación.** — Dados *m* elementos *a, b, c, ... h, k, l,* es evidente que sus combinaciones *monarias* son los *m* elementos dados.

Para formar las *binarias* agreguemos a la derecha de cada *monaria* uno a uno los elementos que le *siguen en el orden establecido,* que para nosotros es el alfabético; para formar las *ternarias* agreguemos a la derecha de cada *binaria* uno a uno los elementos que le siguen en el orden establecido, y así sucesivamente. Así, veamos la formación de las *combinaciones binarias* y *ternarias:*

ab, ac, ad, ae, ... ak, al,
bc, bd, be, ... bk, bl,
cd, ce, ... ck, cl,
de, ... dk, dl,
.....
kl.

abc, abd, abe, ... abk, abl,
acd, ace, ... ack, acl,
ade, ... adk, adl,
.....
akl.
bcd, bce, ... bck, bcl,
bde, ... bdk, bdl,
.....
bkl.

Procediendo así *obtenemos* todas las combinaciones ternarias y *no repetimos* ninguna, porque las que proceden de la misma binaria difieren en el elemento agregado, y las que proceden de distintas binarias difieren a lo menos en aquellas de que se originan.

11. **Problema 2.°: Su número.** — Este número se deduce del de las variaciones y del de las permutaciones. En efecto, si se conociesen las combinaciones de *m* objetos *n* a *n*, permutando en cada una de éstas, de todas las maneras posibles, los *n* elementos que en ella entran, se formarían las variaciones de estos *m* objetos; pues todos los grupos obtenidos son distintos y ninguno se ha omitido. *Todos son distintos*, porque los que proceden de la misma combinación difieren en el orden de los elementos y los que proceden de combinaciones diferentes difieren en la naturaleza de los elementos. Y *ninguno se ha omitido*, ya que una variación n-aria cualquiera contiene necesariamente los mismos objetos que una de las C_m^n combinaciones supuestas dadas, y, como se ha hecho sufrir a los objetos que figuran en esta combinación todas las permutaciones posibles, se sigue que la variación dicha ha sido formada.

Cada combinación da un número P_n de permutaciones o variaciones; luego el número total de estas variaciones será:

$$V_m^n = C_m^n \cdot P_n$$

de donde:

$$C_m^n = \frac{V_m^n}{P_n} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,\ldots\,(m-n+1)}{1.2.3\,\ldots\,n} \qquad (1)$$

Multiplicando numerador y denominador de la fórmula (1) por $(m-n)!$, se obtiene:

$$C_m^n = \frac{m!}{n!\,(m-n)!} \qquad (2)$$

12. **Consecuencias.** — 1.ª Si en la fórmula (2) hacemos $n = m$, resulta:

$$C_m^m = \frac{m!}{m!\,.\,o!} = \frac{1}{o!}.$$

Pero, por su naturaleza, $C_m^m = 1$, luego $1 = \frac{1}{o!}$; de donde, $o! = 1$.

2.ª Si en la fórmula (2) hacemos $n = o$, resulta:

$$C_m^0 = \frac{m!}{o!\,.\,m!} = \frac{1}{o!} = \frac{1}{1} = 1.$$

13. **Primera propiedad de los números combinatorios.** — *Dos números combinatorios de mismo numerador y órdenes complementarios son iguales.*

Es decir:

$$\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n} \tag{3}$$

Esto resulta de la fórmula (2), ya que ésta no cambia cuando se sustituye n por $m - n$. En efecto:

$$\binom{m}{m-n} = \frac{m!}{(m-n)!\,[m-(m-n)]!} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!} = \binom{m}{n}$$

Ejemplo. — El número de combinaciones binarias de 6 elementos es igual al número de combinaciones cuaternarias de 6 elementos:

$$\binom{6}{2} = \frac{6.5}{1.2} = 15; \quad \binom{6}{4} = \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4} = 15.$$

14. **Segunda propiedad de los números combinatorios.** — *El número combinatorio* $\binom{m}{n}$ *es igual a la suma de los números combinatorios* $\binom{m-1}{n-1}$ y $\binom{m-1}{n}$.

Es decir:

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n} \tag{4}$$

Para demostrar esta igualdad, agruparemos las combinaciones n-arias en dos categorías: aquéllas que contienen el elemento A y aquéllas que no lo contienen. Las primeras pueden considerarse formadas por la adición del elemento A a las combinaciones de orden $n - 1$, formadas con los $m - 1$ restantes, y así obtendremos C_{m-1}^{n-1} combinaciones. Las segundas, como no contienen el elemento A se han formado con los $m - 1$ restantes, tomados n a n, lo que da C_{m-1}^{n}. Por lo tanto, queda probado el teorema.

Ejemplo. 1 — Si $m = 7$ y $n = 3$, tenemos:

$$\binom{7}{3} = \frac{7.6.5}{1.2.3} = 35$$

y

$$\binom{6}{2} + \binom{6}{3} = \frac{6.5}{1.2} + \frac{6.5.4}{1.2.3} = 15 + 20 = 35.$$

Ejemplo. 2 — Con los elementos A, B, C y D, las combinaciones en que entra A son:

A B, A C, A D.

Su número es $\binom{3}{1}$. Las combinaciones en que no entra A son:

B C, B D, C D.

Su número es $\binom{3}{2}$. Por tanto:

$$\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2}$$

EJERCICIOS

1. Con las *a, b, c, d, e, f, g, h,* ¿cuántas combinaciones de 5 letras pueden formarse?
2. ¿Cuántos grupos diferentes de 4 estudiantes cada uno pueden formarse con los 8 estudiantes de una clase?
3. Una compañía de comediantes tiene en su lista 40 miembros. ¿Durante cuántos días puede escogerse un grupo diferente de 6 comediantes, si cada día se forma un grupo?
4. Con 10 colores, ¿cuántas mezclas pueden hacerse tomando 3 colores cada vez?
5. ¿Cuántos productos diferentes pueden formarse con los 9 números dígitos, tomándolos de 4 en 4?
6. Un cabildo de catedral tiene 3 cargos iguales vacantes. Con 6 candidatos, ¿de cuántos modos diferentes podrían llenarse estas tres vacantes?
7. Un yate tiene banderas de 20 naciones diferentes. Tiene espacio para desplegar a la vez 18 solamente. ¿Cuántos despliegues diferentes puede hacer?
8. Un sargento que manda 20 soldados, emplea 5 para cada guardia. Después de haberlos empleado de todas las maneras posibles, ¿cuántas veces sirvió cada soldado en la guardia?
9. Con 20 consonantes y 5 vocales, ¿cuántas palabras pueden formarse, de modo que cada una tenga tres consonantes y dos vocales, sin repetirse ninguna?
10. Demostrar la igualdad:

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-2}{n-1} + \binom{m-3}{n-1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n-1}{n-1}$$

11. Calcular m, sabiendo que $3\,C_m^4 = 5\,C_m^2$.
12. Para formar la tripulación de una "fortaleza volante" se deben elegir 4 maquinistas y un capitán entre un grupo de 12 hombres, de los cuales 9 son maquinistas y 3 capitanes. ¿Cuántas tripulaciones pueden obtenerse?
13. ¿Cuántas líneas de navegación pueden establecerse entre seis países separados por el mar y no situados en línea recta?
14. Un carrillón de 8 campanas utiliza 5 para el repique diario; si las combina de todas las maneras posibles, ¿cuántas veces se oye el mismo repique en un año?
15. ¿De cuántos modos puede escogerse un comité de 4 miembros de un grupo de 12 personas, *a*), si un miembro A está incluído en cada grupo; *b*), si aquél está siempre excluído?

16. ¿De cuántos modos pueden distribuirse igualmente 15 libros diferentes entre tres personas?

17. ¿De cuántos modos diferentes puede distribuirse una baraja de 52 cartas entre cuatro jugadores?

18. ¿Cuántos planos determinan 10 puntos del espacio, si cuatro cualesquiera de ellos no están en un mismo plano?

19. Hay 12 puntos en un plano, de los cuales no hay tres en línea recta. ¿Cuántos triángulos pueden formarse uniendo estos puntos?

20. Con cinco factores positivos y cinco negativos, ¿cuántos productos positivos pueden formarse de modo que cada uno de ellos sea de cinco factores distintos?

21. ¿En cuántos puntos se cortan 8 rectas, tres de las cuales son paralelas entre sí?

22. ¿De cuántos modos diferentes se pueden repartir cuatro juguetes distintos entre tres niños sin que sobren juguetes, ni dejar a ningún niño sin juguete?

23. Un droguero tiene 18 jarabes diferentes para dar sabor al agua. ¿Cuántos vasos diferentes puede preparar tomando dos jarabes cada vez? Si acepta 5 duros por todos los que pueda preparar de este modo, ¿cuánto gana o pierde por la transacción, si el precio del vaso es 0'05 pesetas?

24. ¿Cuántos valores diferentes pueden obtenerse con una perra chica, una perra gorda, un cupro-níquel, una peseta, dos pesetas, un duro, tomando para cada grupo dos monedas? ¿A qué cantidad asciende la suma de todos estos grupos?

25. Se quiere repartir 12 naranjas entre 12 niños, divididas aquéllas en tres lotes iguales. ¿De cuántas maneras puede hacerse el reparto? ¿Y si los lotes fueran de 5 naranjas, 4 y 3, respectivamente?

26. Sabiendo que, tomándolos de dos en dos, con m objetos se pueden formar 435 variaciones más que combinaciones, se desea calcular el valor de m.

27. Sabiendo que 1305 es la suma del número de variaciones y del de combinaciones que se pueden formar con m objetos tomados 2 a 2, determinar m.

28. Si tenemos los números 3742 y 65189, ¿cuántos números podremos formar de manera que cada uno tenga tres cifras distintas del primero y tres diferentes del segundo?

29. El número de variaciones binarias de cierto número de elementos es igual al de combinaciones ternarias de los mismos elementos. ¿Cuántos son éstos?

30. Resolver la ecuación

$$\binom{39}{x} = \binom{39}{x+5}$$

31. A una reunión asisten 18 personas: 1.º) ¿Cuántos grupos distintos de 5 personas se pueden formar? 2.º) ¿En cuántos de dichos grupos entra una persona determinada? 3.º) ¿En cuántos entran tres personas determinadas?

32. Encontrar la relación que existe entre los números m y n si se verifica:

$$\binom{m}{n} = 2\binom{m-1}{n}$$

33. Se tienen, dos números: el 1357 y 246. ¿Cuántos números de cuatro cifras pueden formarse que contengan dos cifras no repetidas del primero y dos cifras no repetidas del segundo?

3

Potencia m-sima de un binomio

15. **La inducción matemática.** — *La inducción matemática* es un método de demostración muy útil para establecer la validez de ciertos teoremas relativos a números naturales. También se emplea algunas veces cuando otros métodos presentan inconvenientes.

Una demostración por *inducción matemática* consta de dos partes, y ambas son esenciales para establecer un teorema:

Primera. Comprobar que el teorema se verifica para números enteros pequeños $n = 1$, $n = 2$, y quizás $n = 3$, sustituyendo estos valores en la expresión dada.

Segunda. Admitiendo que el teorema es cierto cuando n es igual a un número m, demostrar que también es cierto para $n = m + 1$. Con lo cual, comprobado en la primera parte de la demostración que el teorema es cierto para $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$, necesariamente se sigue de la segunda parte que es cierto para $n = 4$, y así sucesivamente.

Ejemplo. — *Demostrar que la suma de los* n *primeros números impares positivos es igual a* n^2. Es decir:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2 \qquad (1)$$

Si $n = 1$, la fórmula (1) da $1 = 1$
Si $n = 2$, la fórmula (1) da $1 + 3 = 2^2$
Si $n = 3$, la fórmula (1) da $1 + 3 + 5 = 3^2$

Luego la fórmula (1) queda comprobada para $n = 1$, $n = 2$ y $n = 3$.
Ahora admitimos que es cierta para $n = m$; esto es:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2m - 1) = m^2. \qquad (2)$$

Si añadimos a ambos miembros el inmediato número impar positivo, es decir, $2m + 1$, tenemos:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2m - 1) + (2m + 1) = m^2 + 2m + 1$$

ó

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2m - 1) + (2m + 1) = (m + 1)^2 \qquad (3)$$

que evidentemente es verdadera, por deducirse de (2) sumando un mismo número a sus dos miembros.

Luego queda demostrado que si la proposición es cierta para un número de términos $n = m$, también es cierta para $n = m + 1$, y, por tanto, es cierta para cualquier número de términos.

16. **Potencia m-sima de un binomio (binomio de Newton).** — El desarrollo de $(x + a)^m$ se deduce por inducción matemática.

Por multiplicación obtenemos los siguientes desarrollos:

$$(x + a)^1 = x + a = \binom{1}{0} x + \binom{1}{1} a$$

$$(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2 = \binom{2}{0} x^2 + \binom{2}{1} xa + \binom{2}{2} a^2$$

$$(x + a)^3 = x^3 + 3x^2 a + 3a^2 x + a^3 = \binom{3}{0} x^3 + \binom{3}{1} x^2 a + \binom{3}{2} xa^2 + \binom{3}{3} a^3.$$

En estas igualdades se observa que:

1.° *El desarrollo es un polinomio ordenado homogéneo y completo en* x *y* a, *de grado igual al exponente del binomio.*

2.° *Los coeficientes de los términos del desarrollo o coeficientes binómicos son números combinatorios, cuyo* numerador *es igual al exponente* m *del binomio, y cuyos órdenes crecen desde* cero *hasta* m.

3.° *El número de términos del desarrollo es igual a* m + 1.

Supongamos que estas tres leyes se verifican para el exponente *m*, o sea que es:

$$(x + a)^m = \binom{m}{0} x^m + \binom{m}{1} x^{m-1} a + \binom{m}{2} x^{m-2} a^2 + \ldots + \binom{m}{m-1} xa^{m-1} + \binom{m}{m} a^m \qquad (4)$$

Demostraremos que entonces se verifica también para el exponente m + 1. En efecto, multiplicando los dos miembros de la igualdad (4) por x + a, resulta en el primer miembro $(x + a)^{m+1}$, y en el segundo miembro:

$$\binom{m}{0} x^m + \binom{m}{1} x^{m-1} a + \binom{m}{2} x^{m-2} a^2 + \ldots + \binom{m}{m-1} xa^{m-1} + \binom{m}{m} a^m$$
$$\times x + a$$

$$\binom{m}{0} x^{m+1} + \binom{m}{1} x^m a + \binom{m}{2} x^{m-1} a^2 + \ldots + \binom{m}{m-1} x^2 a^{m-1} + \binom{m}{m} xa^m$$
$$+ \binom{m}{0} x^m a + \binom{m}{1} x^{m-1} a^2 + \ldots + \binom{m}{m-2} x^2 a^{m-1} + \binom{m}{m-1} xa^m + \binom{m}{m} a^{m+1}$$

$$\binom{m+1}{0} x^{m+1} + \binom{m+1}{1} x^m a + \binom{m+1}{2} x^{m-1} a^2 + \ldots + \binom{m+1}{m-1} x^2 a^{m-1} + \binom{m+1}{m} xa^m + \binom{m+1}{m+1} a^{m+1}$$

en virtud de la propiedad segunda de los números combinatorios (núm. 14), y de que:

$$\binom{m}{0} = \binom{m+1}{0} = \binom{m}{m} = \binom{m+1}{m+1} = 1$$

o sea que:

$$(x + a)^{m+1} = \binom{m+1}{0} x^{m+1} + \binom{m+1}{1} x^m a + \ldots + \binom{m+1}{m} xa^m + \binom{m+1}{m+1} a^{m+1}$$

Luego las tres leyes enunciadas, que son ciertas para los exponentes 1, 2 y 3, y también para $m + 1$ cuando lo son para m, se verifican siempre cualquiera que sea el exponente del binomio.

17. **Desarrollo de $(x - a)^m$.** — Este desarrollo es igual que el de $(x + a)^m$, con la diferencia de los signos, que van alternando (el + y el —), en razón de que las potencias impares de a llevan signo negativo. O sea:

$$(x - a)^m = \binom{m}{0} x^m - \binom{m}{1} x^{m-1} a + \binom{m}{2} x^{m-2} a^2 - \ldots + \\ + (-1)^{m-1} \binom{m}{m-1} x a^{m-1} + (-1)^m \binom{m}{m} a^m \qquad (5)$$

Esta fórmula, lo mismo que la (4), se llaman del *binomio de Newton,* por ser este matemático y físico inglés el que la generalizó para exponentes no enteros, pero fue deducida por Tartaglia (siglo XVI).

Se denomina *término general* del desarrollo del binomio de Newton al que ocupa el lugar $n + 1$, y vale:

$$T_{n+1} = (-1)^n \binom{m}{n} x^{m-n} a^n \qquad (6)$$

18. **Relaciones entre los coeficientes binómicos.** — 1.ª *Cada coeficiente se obtiene multiplicando el coeficiente del término anterior por el exponente de* x *en dicho término y dividiéndole por el exponente de* a *en el término que se calcula.*

En efecto el coeficiente del término general es:

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1) \ldots (m-n+2)(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1) \cdot n}$$

y el del término anterior es:

$$\binom{m}{n-1} = \frac{m(m-1) \ldots (m-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)}.$$

Por tanto el coeficiente del término general se puede escribir:

$$\binom{m}{n} = \frac{m(m-1) \ldots (m-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)} \cdot \frac{m-n+1}{n} = \\ = \binom{m}{n-1} \cdot \frac{m-n+1}{n}$$

como queríamos demostrar.

2.ª *Los coeficientes de dos términos equidistantes de los extremos son iguales.*

Por ser números combinatorios de igual numerador y órdenes complementarios (n.º 13). Se deduce como consecuencia que basta calcular la mitad de los coeficientes; los restantes serán iguales a los anteriores, pero en orden inverso.

19. **Aplicaciones.** — 1.ª Para obtener rápidamente una potencia cualquiera del binomio, por ejemplo $(x + a)^6$, se escriben inmediatamente los dos primeros términos: x^6 y $6\,a\,x^5$. Aplicando luego la 1.ª relación precedente, se multiplica el coeficiente 6 del segundo por 5 y se le divide por 2, lo que equivale a multiplicar 3 por 5: el tercer término es, pues, $15\,a^2\,x^4$. Multiplicando ahora el coeficiente 15 por el exponente 4 y dividiendo por 3, es decir, multiplicando 5 por 4, se obtiene el coeficiente del término siguiente, que será $20\,a^3\,x^3$. No teniendo el desarrollo más que siete términos, los coeficientes de los tres últimos están ya calculados, según la relación 2.ª. Se tiene, pues:

$$(x + a)^6 = x^6 + 6\,a\,x^5 + 15\,a^2\,x^4 + 20\,a^3\,x^3 + 15\,a^4\,x^2 + 6\,a^5\,x + a^6.$$

2.ª *Desarrollar el siguiente binomio:* $(3\,x - 4\,a)^5$

$$(3\,x - 4\,a)^5 = (3\,x)^5 - 5\,(3\,x)^4\,(4\,a) + 10\,(3\,x)^3\,(4\,a)^2 - \\ - 10\,(3\,x)^2\,(4\,a)^3 + 5\,(3\,x)\,(4\,a)^4 - (4\,a)^5 = 243\,x^5 - \\ - 1620\,x^4\,a + 4320\,x^3\,a^2 - 5760\,x^2\,a^3 + 3840\,x\,a^4 - 1024\,a^5.$$

3.ª *En el desarrollo de* $(x^3 - x^{1/2})^{15}$ *calcular el lugar que corresponde al término en que* x *tiene el exponente* 30. *Calcular también el valor de su coeficiente.*

Solución. — Aplicando la fórmula (6):

$$T_{n+1} = (-1)^n \binom{15}{n} (x^3)^{15-n} \cdot (x^{1/2})^n = (-1)^n \cdot \binom{15}{n} x^{15-3n} \cdot x^{n/2} = \\ = (-1)^n \binom{15}{n} x^{15-3n+n/2}.$$

de donde se deduce:

$$45 - 3\,n + \frac{n}{2} = 30; \qquad \mathbf{n = 6.}$$

Por tanto, se trata del término 7.º, y el valor de su coeficiente es:

$$(-1)^6 \binom{15}{0} = \mathbf{5005.}$$

20. **Triángulo de Tartaglia.** — La propiedad del número 14 permite el cálculo rápido de los números combinatorios de base *m* conocidos los de base m — 1, y, por tanto, los coeficientes del desarrollo de la potencia de un binomio con exponente *m*, conocido el desarrollo del mismo binomio con exponente *m — 1*. Podemos escribirlos así:

m = 1					1		1			
m = 2				1		2		1		
m = 3			1		3		3		1	
m = 4		1		4		6		4		1
m = 5	1		5		10		10		5		1

que por su figura se llama *triángulo aritmético* (cuyo origen es muy antiguo, aunque se atribuye a Tartaglia).

Escritas las oblicuas 1, 1, 1 ..., se obtiene el triángulo aplicando la fórmula del número 14, que expresa: *Cada elemento es la suma de los dos que tiene encima.*

La relación del número 13 expresa la igualdad de los números equidistantes de los extremos de cada fila.

21. **Cuadrado de un polinomio.** — *El cuadrado de un polinomio es igual a la suma de los cuadrados de cada uno de sus términos, más el doble producto de cada uno de ellos por todos los que le siguen:*

Sea calcular $(a + b + c)^2$.

$$\begin{array}{l} a + b + c \\ \times\, a + b + c \\ \hline a^2 + ab + ac \\ \quad + ab \quad + b^2 + bc \\ \quad\quad + ac \quad + bc + c^2 \\ \hline a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2 \end{array}$$

O sea:

$$\mathbf{(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.}$$

Ejemplo:

$$(m + n - p - q)^2 = m^2 + n^2 + (-p)^2 + (-q)^2 + 2m \cdot n + 2m(-p) + 2m \cdot (-q) + 2n(-p) + 2n(-q) + 2(-p)(-q) = m^2 + n^2 + p^2 + q^2 + 2mn - 2mp - 2mq - 2np - 2nq + 2pq.$$

22. Variación de las potencias de números mayores que la unidad. *Las potencias de exponente natural de los números mayores que la unidad:* 1.°, *son mayores que la unidad;* 2.°, *crecen al crecer el exponente, y* 3.°, *pueden llegar a ser mayores que cualquier número dado H, por grande que sea:*

En efecto, un número mayor que la unidad puede representarse por $1 + \alpha$, siendo α un número positivo.

Luego: 1.° Las potencias son *mayores que la unidad* por ser la potencia un producto de factores, en este caso mayores que la unidad.

2.° Poniendo la identidad ... ... $(1 + \alpha)^m = (1 + \alpha)^m$

y la desigualdad ... ... $1 + \alpha > 1$

y multiplicando, obtenemos ... ... $(1 + \alpha)^{m+1} > (1 + \alpha)^m$

resultado que prueba la segunda parte del enunciado.

3.° Es evidente que:

$$(1 + \alpha)^m > 1 + m\alpha$$

pues los del segundo miembro son los dos primeros términos del desarrollo del binomio de Newton.

Para que sea $(1 + \alpha)^m$ mayor que cualquier número dado H, basta determinar m, de modo que se tenga:

$$1 + m\alpha > H;$$

o sea:

$$m > \frac{H - 1}{\alpha}$$

lo cual siempre es posible, ya que m es un número natural, y la serie natural de los números es ilimitada. Esto se expresa diciendo que $(1 + \alpha)^m$ tiende a ∞ cuando m aumenta indefinidamente.

23. Variación de las potencias de números menores que la unidad. *Las potencias de exponente natural de los números menores que la unidad:* 1.°, *son menores que la unidad;* 2.°, *decrecen cuando el exponente crece, y* 3.°, *tienen por límite cero cuando el exponente crece indefinidamente.*

En efecto, un número α, menor que la unidad, puede representarse por $\frac{1}{\alpha'}$, siendo α' superior a la unidad; se tiene entonces:

$$\alpha^m = \frac{1}{\alpha'^m}.$$

Y de esta igualdad salen inmediatamente las tres partes del teorema, por cumplir α'^{m} las tres partes del teorema del número 22.

Fácilmente se demuestra que las mismas reglas se verifican cuando son potencias de exponente fraccionario.

EJERCICIOS

Desarrollar cada uno de los siguientes binomios:

1. $(a - b)^4$.
2. $(x - y)^5$.
3. $(3x - 2y)^4$.
4. $(\frac{1}{2}u + v^{-1})^4$.
5. $(a^{1/2} - 2b^{1/2})^4$.
6. $(e^x - e^{-x})^3$.
7. $(\frac{1}{2}x + \frac{2}{x})^5$.
8. $(ax - \frac{y}{a})^6$.
9. $(x^{1/3} - y^{1/3})^3$.
10. $(1 - \frac{1}{2}x^2)^4$.
11. $(4x^{-2} + \frac{4}{x^{-1/2}})^3$.
12. $(3x^2y + b^2)^5$.
13. $(2x - y)^4 - (2y - x)^4$.
14. $(a + b - c)^3$.
15. $(\frac{2b^2}{a} - \frac{a^2}{2b})^4$.

Por medio del desarrollo del binomio hallar el valor de los siguientes números sólo con tres cifras decimales:

16. $\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$.
17. $1'98^5$.
18. $(0'99)^3$.
19. $(2'01)^3$.
20. $(4'9)^4$.
21. $(3'98)^4$.

En los siguientes ejercicios hallar el término indicado y ningún otro más:

22. El 10.° de $(2a - 3x)^{10}$.
23. El 8.° término de $(2a - y)^{12}$.
24. El 7.° término de $(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y)^{11}$.
25. El 9.° término de $(x^{-2} - \frac{1}{3}y^{1/2})^{13}$.
26. El 12.° término de $(2x + \frac{1}{2x})^{15}$.

27. El 11.° término de $\left(\frac{a-2}{3} - \frac{2}{b-2}\right)^{14}$.

28. Escribir el término medio de $\left(x - \frac{1}{2}y\right)^{10}$.

29. Calcular el mayor coeficiente del desarrollo de $(a^3 - b)^{11}$.

30. Dada la potencia $\left(x^2 + \frac{x}{2}\right)^{20}$, calcular el término en que el exponente de x es 28.

31. Hallar el coeficiente del término de $(x - 3x^2)^5$ que tenga mayor grado.

32. Los coeficientes de los términos que ocupan el lugar $r + 1$ y el lugar $r + 3$ en el desarrollo de $(1 + x)^n$ son iguales. Determinar r en función de n.

33. Hallar el coeficiente de x^5 en el desarrollo de: $(3x - x^{-1})^7$.

34. El tercero y el cuarto término del desarrollo de $(1 + x)^y$ son iguales a 90 y 270. Hallar x e y.

35. Los coeficientes de x en el quinto y séptimo término de $(1 + 2x)^n$ son, respectivamente, 1120 y 1792. Determinar n.

36. La suma de los términos extremos del desarrollo de $(a + b)^4$ es 4112 y el término central vale 1536. Calcular a y b sabiendo que son positivos.

37. Demostrar por inducción matemática:

a) $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots + 2n = n(n + 1)$

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}(2n + 1)(n + 1)n.$

38. Demostrar que la suma de los coeficientes binómicos de lugar par es igual a la suma de los de lugar impar; es decir:

$$\binom{m}{1} + \binom{m}{3} + \binom{m}{5} + \ldots = \binom{m}{0} + \binom{m}{2} + \binom{m}{4} + \ldots$$

Nota. — Hágase $x = a = 1$ en el desarrollo de $(x - a)^m$.

39. Hallar el cuadrado de los polinomios:

a) $(a + b + m + n)^2$.
b) $(a - b + m - n)^2$.
c) $(2a + ab + 2m + 2n)^2$.
d) $(x^3 + x^2 + x + 1)^2$.

40. Hallar la suma de los coeficientes del desarrollo de:

a) $(2x + 3a)^4$.
b) $(3x - 2a)^5$.
c) $(4m - 2n^2)^4$.

4

Probabilidad y promedios

24. **Cálculo de probabilidades.** — En una serie de sucesos debidos al azar se llama *probabilidad* de uno determinado al *cociente entre el número de casos favorables y el número total de casos posibles,* siempre que estos casos sean igualmente probables, esto es, siempre que pueda suceder cualquiera de ellos sin preferencia a los otros.

Ejemplo 1. — Al tirar un dado perfectamente homogéneo y sin defecto, la *probabilidad* de que salga un 2 es:

$$p = \frac{1}{6}.$$

Ejemplo 2. — Al arrojar una moneda y observar si sale *cara* o *cruz,* la probabilidad de que salga *cruz* es:

$$p = \frac{1}{2}.$$

Si se realiza un número grande de pruebas con una moneda sin defectos, saldrá, efectivamente, *cruz* un número de veces muy aproximado a la mitad.

Ejemplo 3. — *En una urna hay 3 bolas rojas y 5 azules. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una bola, ésta sea azul?*

Si las bolas se han revuelto bien, al sacar una puede salir una cualquiera de las 8. Luego la probabilidad de que sea azul será:

$$p = \frac{5}{8}.$$

25. **Frecuencia absoluta y relativa.** — *Frecuencia absoluta* de un suceso, en n pruebas análogas, es el número n' de veces que se ha producido el suceso. Y se llama *frecuencia relativa* al cociente n'/n de dividir la frecuencia absoluta por el número total de pruebas.

Así, si un dado se tira 10 veces y en 3 de ellas sale un *dos,* la *frecuencia absoluta* es 3, y la *frecuencia relativa* es 3/10.

26. **Ley del azar.** — Es ley observada infinidad de veces que si tiramos el dado repetidamente, el 2, por ejemplo, sale un número de

veces que se aproxima mucho a la *sexta* parte del total. O sea, que la frecuencia relativa del suceso considerado es muy próxima a la probabilidad 1/6 del mismo, y tanto más cuanto mayor es el número de pruebas. Esta ley se denomina *ley del azar*, y puede enunciarse así:

En un conjunto de pruebas realizadas en idénticas condiciones, un suceso se produce con una frecuencia relativa que se aproxima a la probabilidad, al aumentar el número de pruebas.

Dado que en muchos fenómenos estadísticos no puede aplicarse la definición de probabilidad dada en el número 24, suele preferirse la siguiente, más precisa y científica:

La probabilidad de un suceso, cuando se va a realizar una prueba, es el límite al que tiende la frecuencia relativa de dicho suceso, cuando el número de pruebas aumenta indefinidamente.

27. **Probabilidad total.** — Al tirar un dado que tiene marcados los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6, ¿cuál es la probabilidad de que salga un 2 ó un 3? La probabilidad será evidentemente:

$$p = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Esta se denomina *probabilidad total.* Se verifica el siguiente principio:

La probabilidad de que tenga lugar uno u otro de varios sucesos incompatibles es la suma de las probabilidades de cada uno de ellos.

Ejemplo. — *Hallar la probabilidad de que al echar dos dados se obtenga la suma* 10.

La suma 10 puede obtenerse con 6 + 4, con 5 + 5 ó con 4 + 6.

El número total de casos posibles es 6 . 6 = 36.

La probabilidad de que salga 6 + 4 es $\frac{1}{36}$.

La probabilidad de que salga 5 + 5 es 1/36.

La probabilidad de que salga 4 + 6 es 1/36.

Luego la probabilidad de que salga la suma 10 es la probabilidad total:

$$p = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{1}{12}.$$

28. **Probabilidad compuesta.** — ¿Cuál es la probabilidad de que al arrojar dos veces un dado, salga la primera vez un 4 y la segunda un 5? El número de combinaciones que pueden salir es 6 . 6 = 36.

La probabilidad de que salga una cualquiera de ellas es:

$$\frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}.$$

Esta se denomina *probabilidad compuesta,* y su principio se enuncia así:

La probabilidad de que varios sucesos independientes entre sí se verifiquen al mismo tiempo, es igual al producto de las probabilidades absolutas de cada uno de ellos.

29. **Esperanza matemática.** — *En juegos de azar se llama esperanza matemática de un jugador, al producto del premio que ofrece el juego por la probabilidad de obtenerlo.*

Así, por ejemplo, sea un jugador que espera recibir 360 ptas. si lanzando dos dados saca una pareja.

La probabilidad de obtener el premio es:

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

La esperanza matemática será:

$$360 \times \frac{1}{6} = 60 \text{ ptas.}$$

Un juego es equitativo cuando las puestas de los jugadores son iguales a sus esperanzas matemáticas.

En la lotería y otros juegos de azar las puestas suelen exceder a las esperanzas matemáticas.

Ejemplo. — *Se quiere repartir equitativamente un premio de* 60 *ptas. entre tres jugadores que disponen de un dado. El primero apuesta a sacar el* 1; *el segundo, una puntuación par y el tercero, las puntuaciones restantes. ¿Cuál debe ser la puesta de cada uno?*

Solución: Las probabilidades son:

$$p_1 = \frac{1}{6}; \quad p_2 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}; \quad p_3 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Las esperanzas matemáticas serán:

$$e_1 = \frac{1}{6} \cdot 60 = 10 \text{ ptas.}; \quad e_2 = \frac{1}{2} \cdot 60 = 30 \text{ ptas.}; \quad e_3 = \frac{1}{3} \cdot 60 = 20 \text{ ptas.}$$

Las puestas serán respectivamente de 10, 30 y 20 pesetas.

30. **Estadística matemática.** — Esta rama de las Matemáticas tiene por objeto hallar la significación e interpretación de los datos cuantitativos procedentes de los diferentes campos de investigación: físico, químico, biológico, económico, etcétera.

Para ello se ha de realizar un trabajo previo de recopilación, ordenación y análisis de los datos.

La ordenación puede realizarse, por ejemplo, por orden de magnitud creciente o decreciente.

Ejemplo. — Las notas trimestrales de Matemáticas obtenidas por 40 alumnos de Quinto Curso, ordenadas en sentido creciente han sido:

11	22	25	29	35	37	39	47
13	22	26	29	35	38	42	47
14	23	27	31	35	38	45	49
14	23	28	32	35	38	45	49
20	24	28	34	36	39	46	49

Para hacer su estudio, estas notas pueden distribuirse en grados (o intervalos de clase), según el cuadro siguiente, llamado *cuadro de frecuencias:*

Grado	*Puntuación*	Número de alumnos (frecuencia)
5°	0 a 9'9	0
4°	10 a 19'9	4
3°	20 a 29'9	13
2°	30 a 39'9	14
1°	40 a 49'9	9

Se observa en este cuadro que las notas que más abundan son las comprendidas entre 20 y 40 puntos. Los valores extremos escasean cada vez más al aproximarse a los valores límites 0 y 50.

Esta distribución se presenta con extraordinaria frecuencia en las más variadas aplicaciones, por lo que en su estudio es de gran interés.

31. **Promedios.** — Los promedios tienen por objeto la representación de una serie de datos por un sólo número. La condición fundamental para que un promedio pueda representar una serie es que exista una tendencia de los datos a concentrarse hacia un valor central. El promedio representa en una primera aproximación la tendencia central de la serie.

Las principales clases de promedios son, entre otros tipos, la *media aritmética* y la *media geométrica*. La primera puede ser, a su vez *simple* y *ponderada*.

32. **El signo sumatorio Σ.** — El símbolo Σ es la representación abreviada de una suma, cuyos sumandos se obtienen todos de una misma expresión al ir dando valores sucesivos a un número indeterminado, de ordinario un subíndice, que en ella aparece. Se lee "sumatorio de..."

Así el sumatorio

$$\sum_{1}^{n} x_i$$

representa la suma $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$, pues en él al subíndice *i* hay que darle todos los valores enteros desde 1 hasta *n*.

33. **Media aritmética.** — *La media aritmética simple de una serie de valores es el cociente de dividir la suma de los valores por el número de ellos.*

Es decir:

$$M_s = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n}{n} = \frac{\Sigma\, v_i}{n}$$

siendo *n* el número de valores de la variable y v_1, v_2, v_3 ... v_n dichos valores.

El cálculo de la media aritmética simple resulta largo cuando el número de datos es grande. En este caso es más cómodo el empleo de la *media aritmética ponderada,* que es igual a la *suma de los productos del valor medio de cada intervalo de clase por la frecuencia correspondiente, dividido por el número total de datos.*

Es decir:

$$M_p = \frac{m_1 f_1 + m_2 f_2 + m_3 f_3 + \ldots + m_i f_i}{n} = \frac{\Sigma\, m_i f_i}{n}$$

siendo m_1, m_2, m_3, ... m_i los valores medios de clases, y f_1, f_2, f_3, ... f_i las frecuencias correspondientes; *n* representa el número total de casos.

Para hallar este promedio hay que formar antes la tabla de distribución de frecuencias.

Ejemplo. — *Calculemos la media aritmética simple y ponderada en el ejemplo del número* 30.

La suma de todas las notas obtenidas por los 40 alumnos es 1299 puntos. La media simple sería:

$$M_s = \frac{1299}{40} = 32'475 \text{ puntos.}$$

Los valores medios de los intervalos de clase o grupos del cuadro de distribución de frecuencias son: 5, 15, 25, 35 y 45. La media ponderada sería:

$$M_p = \frac{5 \,.\, 0 + 15 \,.\, 4 + 25 \,.\, 13 + 35 \,.\, 14 + 45 \,.\, 9}{40} = \frac{1280}{40} = 32.$$

34. **Propiedad fundamental de la media aritmética.** — *La suma algebraica de las desviaciones de los valores individuales de una serie con respecto a su media aritmética es nula.*

En efecto, sean v_1, v_2, v_3, ... v_n, los valores de la serie; M, la media aritmética, y d_1, d_2, d_3, ... d_n, las desviaciones de cada valor respecto de la media, esto es:

$$d_1 = v_1 - M,\ d_2 = v_2 - M,\ \ldots,\ d_n = v_n - M.$$

Por definición se tiene que:

$$M = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n}{n}$$

de donde:

$$M \,.\, n = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n$$

o bien:

$$M + M + M + \ldots + M - v_1 - v_2 - v_3 - \ldots - v_n = 0.$$

Esta igualdad puede escribirse:

$$(M - v_1) + (M - v_2) + (M - v_3) + \ldots + (M - v_n) = 0$$

o sea:

$$d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_n = 0 \qquad \text{c. q. d.}$$

35. **Media geométrica.** — *Media geométrica de* n *valores es la raíz enésima de su producto.*

$$M_g = \sqrt[n]{v_1 \,.\, v_2 \,.\, v_3 \ldots v_n}.$$

Se deduce de la definición que si uno de los valores es cero la media geométrica también será nula. Por esto, y por lo engorroso de su cálculo, la media geométrica se emplea poco, prefiriéndose la media aritmética.

36. **Curvas de frecuencia.** — Se han hecho un millar de disparos con un cañón, para dar en un blanco. Entre la distancia superior que designamos con 1, y la distancia inferior, que designamos con 11, se han encontrado los siguientes números de impactos:

Distancias	1	2	3	4	5	6 (blanco)	7	8	9	10	11
Impactos	1	4	10	89	190	212	204	193	79	16	2

Si en un sistema de ejes de coordenadas cartesianas representamos las distancias en el eje de abscisas, el número de impactos en el

eje de ordenadas, y unimos entre sí los puntos obtenidos, se tiene lo que se llama *el polígono de frecuencia* (fig. 1).

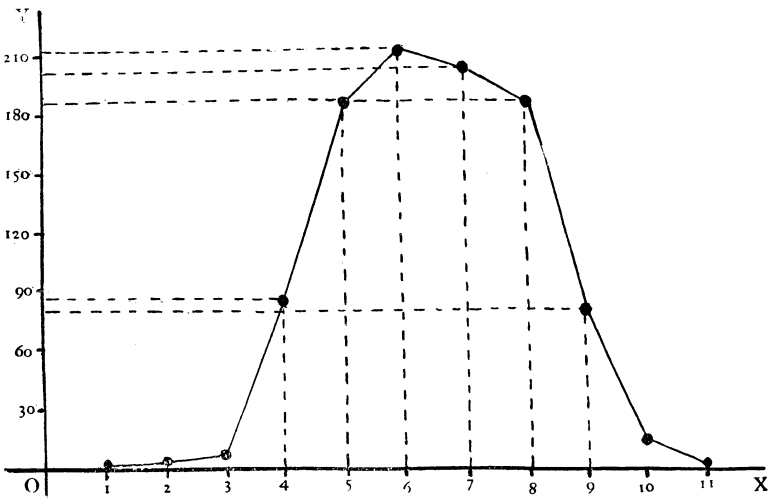


FIG. 1

37. **La curva normal.** — Si en el ejemplo anterior aumentamos el número de pruebas (disparos) y disminuímos cada vez más la amplitud de los intervalos, resultará que los puntos representados estarán cada vez más próximos, y el polígono de frecuencias tenderá a convertirse en una curva, de forma acampanada, llamada *curva de probabilidad.* En muchos casos esta es la denominada *curva normal,* cuya ecuación es:

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$$

donde *h* representa una constante. Al variar *h,* varía la forma de la curva normal, según se estudiará más detalladamente el próximo curso. En la figura 2 se han representado dos ejemplos.

Al representar gráficamente las distribuciones de frecuencia correspondientes a la observación de diferentes fenómenos naturales (estaturas de un grupo de personas, errores de observación en medidas astronómicas, zona de dispersión del tiro de artillería alrededor del blanco, etcétera), se ve que las curvas obtenidas se acercan a la curva normal, tanto más cuanto mayor es el número de casos estudiados.

Ejemplo. — Echemos al aire dos dados un repetido número de veces y anotemos en cada caso la suma de los dos números que salen. Las sumas posibles son: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 y 12. El 7 es el valor central.

Pues bien, observaremos que la suma 7 es la que sale con más frecuencia; le siguen después el 6 y el 8; y así sucesivamente, a medida que nos alejamos del valor central la suma sale cada vez más raramente. Los valores extremos 2 y 12 salen rarísima vez.

En efecto, el 7 puede salir de las siguientes combinaciones:

$6 + 1,\ 5 + 2,\ 4 + 3,\ 3 + 4,\ 2 + 5,\ 1 + 6$

el 6 de:

$5 + 1,\ 4 + 2,\ 3 + 3,\ 2 + 4,\ 1 + 5$

el 9 de:

$6 + 3,\ 5 + 4,\ 4 + 5,\ 3 + 6$

el 2 de:

$1 + 1.$

Representando en el eje O X los valores de la suma y en el eje O Y el número de veces que ha salido, obtendremos una gráfica tanto más próxima a la curva normal cuanto mayor es el número de pruebas.

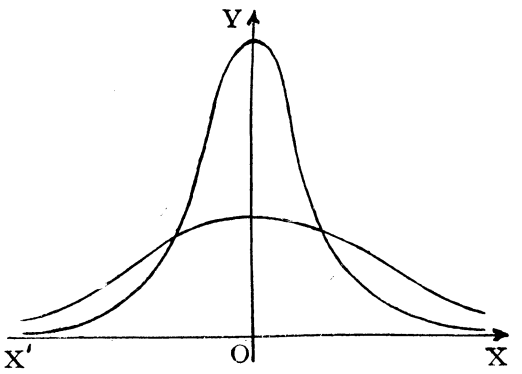


FIG. 2

En general, si en los fenómenos naturales medimos la desviación que presentan a lo largo de la escala cada uno de los grupos sucesivos de la distribución de frecuencias a partir del punto de máxima concentración, se tendrá en gran número de casos que:

1.° *Las desviaciones pequeñas son mucho más frecuentes que las grandes.*

2.° *Las desviaciones extremas son raras.*

3.° *Las desviaciones a uno y otro lado del punto de máxima concentración presentan perfecta* (o casi perfecta) *regularidad.*

38. **Histogramas.** — A menudo se presentan tablas de frecuencia como la siguiente: Se ha pesado a los 40 alumnos de una clase y se han obtenido los siguientes pesos en Kg.:

58	46'3	54	43'6	48'1	54'1	62'3	44
47'3	52'4	47,2	37	59'2	54'5	36'5	54'9
42'4	41	56'4	46'7	52	48'2	53'5	46'5
48	53'6	49	50'3	45'9	43'4	47'9	56
51'7	45'1	52'8	44'2	45	51'1	57'3	49'2

Se adquiere una idea más clara de cómo se distribuyen los alumnos en relación a sus pesos, agrupando éstos en intervalos de 5 en

5 Kg. y viendo cuántos alumnos tienen su peso comprendido dentro de cada uno de ellos. Así se obtiene el siguiente cuadro:

PESO	RECUENTO DE ALUMNOS	NÚM. DE ALUMNOS
De 35 a 39'9 Kg.	1 1	2
" 40 " 44'9 "	1 1 1 1 1 1	6
" 45 " 49'9 "	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	14
" 50 " 54'9 "	1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	12
" 55 " 59'9 "	1 1 1 1 1	5
" 60 " 64'9 "	1	1

En la segunda columna se han ido escribiendo rayitas, una por cada alumno que tiene su peso comprendido en el intervalo correspondiente. En la tercera columna se tiene el número de alumnos de cada grupo. Así hay 6 alumnos que tienen su peso comprendido entre 40 y 44'9 Kg.

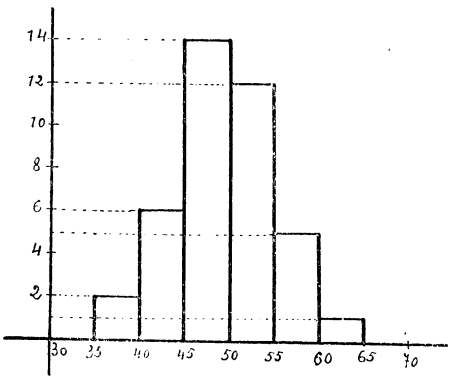


FIG. 3

La representación gráfica de estos resultados se hace mediante el llamado *histograma;* se forma éste tomando los pesos sobre el eje de abcisas y trazando sobre cada intervalo un rectángulo cuya área sea proporcional al número de alumnos correspondientes (figura 3).

El histograma representa una tabla de frecuencias mediante rectángulos.

39. **Dispersión.** — *Dispersión es la separación o variación de los datos incluídos en una distribución, respecto de su promedio.*

El promedio representa en una primera aproximación la tendencia central de una distribución de frecuencia.

Cuando se desea precisar más las características de la distribución o bien realizar su comparación con otras distribuciones, es necesario disponer, además, de otro valor: el grado de dispersión o variación.

40. **Medidas de la dispersión.** — Son, entre otras, las siguientes:

a) *Campo de variación* es la diferencia entre el mayor y el menor de los valores observados.

b) *Desviación media* es la media aritmética de las desviaciones de los datos respecto de su promedio. Las desviaciones de los datos se consideran siempre positivas. Es decir:

$$D_m = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + \ldots + d_n}{n} = \frac{\Sigma\, d_i}{n} = \frac{\Sigma\,(v_i - M)}{n}$$

siendo D_m la desviación media, d_1, d_2 ... d_n las desviaciones de los datos.

c) *Desviación típica,* llamada también *desviación "standard"* o *desviación cuadrática media,* es la raíz cuadrada de la media aritmética de los cuadrados de las desviaciones, medidas con respecto a la media aritmética de las observaciones. O sea:

$$D_t = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \ldots + d_n^2}{n}} = \sqrt{\frac{\Sigma\,(v_i - M)^2}{n}}.$$

Ejemplo. — *Las temperaturas medias mensuales de Madrid durante el año* 1950 *fueron, expresadas en grados centígrados:* 5'4, 8'8, 10'8, 12'7, 15'6, 21'8, 25'9, 23'5, 20, 15'3, 10'8 y 4'5. *Determinar la dispersión de las medias mensuales respecto a la media anual.*

Solución: La suma de las medias mensuales es 175'1. Luego la media anual vale:

$$M = \frac{175'1}{12} = 14'59 \sim 14'6.$$

Formemos la tabla de las desviaciones de las medias mensuales respecto de la normal:

m	d	d^2
4'5	10'1	102'01
5'4	9'2	84'64
8'8	5'8	33'64
10'8	3'8	14'44
10'8	3'8	14'44
12'7	1'9	3'61
15'3	— 0'7	0'49
15'6	— 1	1
20	— 5'4	29'16
21'8	— 7'2	51'84
23'5	— 8'9	79'21
25'9	— 11'3	127'69
175'1	69'1 (1)	542'17

(1) 69'1 es la suma de los valores absolutos de las desviaciones.

Por tanto, las medidas de la dispersión son:

a) *Campo de variación:* 25'9 — 4'5 = **21'4°.**

b) *Desviación media:* $D_m = \frac{60'1}{12} = \mathbf{5'76°}$.

c) *Desviación típica:* $D_t = \sqrt{\frac{542'17}{12}} = \sqrt{45'18} = \mathbf{6'72°}$.

EJERCICIOS

1. Hallar la probabilidad de que al echar dos dados se obtenga una suma, *a*), de 11; *b*), de 12.

2. ¿Cuál es la probabilidad de que al echar dos dados se obtengan en ellos dos números iguales (una pareja)?

3. Hallar la probabilidad de que al echar tres dados, la suma de los números que se obtenga sea igual a 6.

4. En una urna hay 2 bolas negras y 3 bolas blancas. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan las dos primeras las dos bolas negras? (no se vuelven las bolas a la urna después de sacarlas).

5. En el problema anterior, ¿cuál es la probabilidad de que salgan las dos primeras dos bolas blancas?

6. En una rifa de 3000 números se conceden 20 premios. Un jugador compra 15 números. ¿Qué probabilidad tiene de que le toque algún premio?

7. La media aritmética de 25 números es 16 y la media de otros 34 números es 11. Hállese la media de los 59 números tomados en conjunto.

8. Hállese la media aritmética y la media geométrica de los números 1, 2, 4, 8, ..., 2^n.

9. Las temperaturas medias mensuales de Madrid durante el año 1950 fueron, en grados centígrados:

Enero	:	5'4	Mayo	:	15'6	Septiembre	:	20
Febrero	:	8'8	Junio	:	21'8	Octubre	:	15'3
Marzo	:	10'8	Julio	:	25'9	Noviembre	:	10'8
Abril	:	12'7	Agosto	:	23'5	Diciembre	:	4'5

Dibujar la gráfica (diagrama o histograma) correspondiente, y determinar la temperatura media anual durante dicho año.

10. Las notas trimestrales de Ciencias Naturales de 40 alumnos de Quinto Curso fueron:

26	27	15	42	33	26	21	23	50	18
20	35	20	37	22	28	32	31	17	22
29	42	34	27	20	48	27	20	28	45
48	24	45	22	38	23	25	20	18	31

Se desea: 1.°), formar la tabla de distribución de frecuencia; 2.°), determinar el valor de la media aritmética simple; 3.°), ídem de la media aritmética ponderada.

11. La energía eléctrica producida en España durante el decenio 1941-1950, expresada en millones de Kw/h. fue:

1941 : 3890	1945 : 4173	1948 : 6111
1942 : 4438	1946 : 5411	1949 : 5629
1943 : 4476	1947 : 5970	1950 : 6916
1944 : 4720		

Dibujar el gráfico correspondiente.

12. Lanzar 30 veces al aire 6 monedas y formar la tabla de distribución de frecuencias, anotando el número de *caras* que aparecen en cada observación.

13. Tirar dos dados al aire 40 veces y formar la tabla de distribución de frecuencias, anotando cada vez la suma de los números que aparecen.

14. Los salarios diarios de 8 obreros son en pesetas: 32'40, 32'70, 33, 33'25, 33'45, 34'10, 35'40 y 36'65. Hallar: *a*) su media aritmética; *b*) medidas de la dispersión respecto a la misma.

15. Las temperaturas medias anuales de Madrid durante el período 1941-50 fueron por este orden: 13'1, 13'6, 14'1, 13'4, 14'9, 13'4, 14'3, 14'7, 14'3 y 14'6. Calcular la media del período citado y las medidas de dispersión.

16. Las notas finales de curso de un alumno de 6.º año fueron: 9, 8'5, 8'5, 6, 8, 9, 8, 7 y 9. Determinar la media obtenida y las medidas de dispersión.

17. La producción en kw/h. de energía eléctrica, en España durante el quinquenio 1946-50 fue por este orden: 5411, 5970, 6111, 5629 y 6916. Calcular la media del quinquenio y las medidas de dispersión.

18. Al lanzar dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que se obtenga una suma divisible por 3?

19. Con las cifras 1, 2, 3, 4 y 5 se escriben todas las permutaciones posibles. Si se enuncia al azar una de ellas, ¿cuál es la probabilidad de que sea múltiplo de 4?

20. Con las cifras 1, 2, 3, 4 y 5 se forman todos los números posibles de tres cifras distintas. Si se toma al azar uno de ellos, ¿cuál es la probabilidad de que sea múltiplo de 3? ¿Y de 9?

21. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número múltiplo de 11 al colocar al azar las cifras 1, 2, 3 y 4?

22. En una urna hay dos bolas blancas y tres negras, y en otra urna hay cinco blancas y seis negras. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una bola de cada urna sean las dos negras?

23. Tenemos seis tarjetas numeradas con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6. Si tomamos dos tarjetas al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de sus números sea par? ¿Y de que sea impar?

24. En una urna hay cinco bolas numeradas del 1 al 5. Probabilidad de que al sacar dos bolas sus números sumen un múltiplo de 3.

25. Calcular la probabilidad de obtener tres ases al sacar tres cartas simultáneamente de una baraja de 40.

26. Calcular la probabilidad de que al arrojar un dado la suma de las caras laterales y la cara superior sea 18.

27. Un jugador espera cobrar 100 ptas. si tirando un dado la puntuación obtenida es un número par. ¿Cuál es su esperanza matemática?

28. Se quiere distribuir equitativamente un premio de 400 ptas. entre tres jugadores de naipes: el 1.º apuesta a sacar uno de los cuatros o cincos; el 2.º una sota, caballo o rey y el 3.º cualquiera de las cartas restantes. ¿Cuál ha de ser la puesta de cada uno si la baraja es de 40 cartas?

5

Iniciación al método racional

41. **La experiencia y la lógica en la Ciencia.** — *Definir un concepto representado por una palabra o símbolo quiere decir expresar su significado mediante otras palabras o símbolos cuyo valor se conozca.* Por consiguiente, una buena definición emplea sólo palabras más sencillas que aquella que se quiere definir, y, por tanto, algunos de los términos más sencillos quedan sin definición.

Así podemos definir una *guadaña* como *un cuchillo curvo que sirve para cortar hierba.* Aquí las palabras *cuchillo, cortar* y *hierba* deben quedar sin definir, y su conocimiento viene dado por la experiencia.

Del mismo modo, ni en matemáticas ni en la vida ordinaria se pueden demostrar todas las proposiciones, porque el primer paso para discutir una proposición que deseamos demostrar es descubrir las *proposiciones primarias* de las cuales depende. Y, por consiguiente, algunas de estas primeras proposiciones deben permanecer sin demostrar y hay que tomarlas como verdaderas, para tener una base desde la cual podamos empezar nuestra cadena de razonamientos.

Las proposiciones que se toman como ciertas sin demostración, por ser evidentes, se llaman AXIOMAS.

42. **Teorema.** — *Es una verdad que para ser evidente necesita demostración, es decir, un razonamiento fundado en verdades evidentes por sí mismas o probadas anteriormente.*

Por tanto, la edificación racional de la Matemática sigue las siguientes normas:

1.ª Enunciar, sin definición, los conceptos primeros, como por ejemplo, los conceptos de *conjunto, número natural,* etc.; *punto, recta, plano,* etc.

2.ª Admitir, sin demostración, ciertas propiedades que relacionan los conceptos primeros, enunciando los axiomas correspondientes.

3.ª De estos axiomas deducir lógicamente las restantes propiedades o teoremas.

43. **Caracteres de los axiomas.** — Una rama determinada de la ciencia puede fundarse sobre distintos sistemas de axiomas, según las cadenas deductivas que se establezcan entre sus proposiciones, con lo cual una misma proposición puede aparecer como axioma en un determinado sistema y como teorema en otro. Así, si se admite como axioma el *2.º caso de semejanza de triángulos,* sucede que *el postulado de Euclides pasa a ser un teorema.*

Desde el punto de vista puramente lógico, un sistema será tanto más perfecto cuanto menor sea el número de axiomas que necesite. Pero en todo sistema de axiomas han de cumplirse las dos condiciones siguientes:

1.ª *Los axiomas han de ser compatibles,* es decir, ninguno de ellos debe estar en contradicción con los demás o sus consecuencias.

2.ª *Los axiomas deben ser independientes,* es decir, ninguno de ellos o parte de ellos debe poder demostrarse como consecuencia de los demás.

Lema: es una proposición que antecede a un teorema fundamental o a una regla.

COROLARIO O CONSECUENCIA es una proposición que se deduce fácilmente de la demostración de un teorema o de una definición.

ESCOLIO O NOTA es una observación o aclaración a lo explicado.

44. **Partes de la demostración.** — En toda demostración se consideran dos partes: la primera se llama *hipótesis,* H, y está constituída por las proposiciones dadas, que se suponen ciertas; la segunda se llama *conclusión o tesis,* T, y es la proposición que se quiere demostrar deduciéndola de la hipótesis.

Se llama INVERSO O RECÍPROCO de un teorema otro teorema que tiene por hipótesis la conclusión del directo, y por tesis la hipótesis del mismo. Así, si el *directo* dice: *si dos rectas son perpendiculares, forman entre sí ángulos rectos,* el recíproco dirá: *Si dos rectas forman entre sí ángulos rectos, son perpendiculares.*

45. **Teorema contrario** de otro es aquel en que se toman en sentido negativo la misma hipótesis e igual tesis que en el segundo. Así, en el caso actual resulta:

CONTRARIO DEL DIRECTO. *Si dos rectas no son perpendiculares, no forman entre sí ángulos rectos,* pues si los formaran, en virtud del recíproco las rectas serían perpendiculares. Pero la *certeza de un teorema no implica la de su contrario.*

CONTRARIO DEL RECÍPROCO. *Si dos rectas no forman entre sí ángulos rectos, no son perpendiculares,* pues si fueran perpendiculares, en virtud del directo, formarían entre sí ángulos rectos.

Como se ve, siendo ciertos el directo y el recíproco, deben serlo también sus contrarios; así como se vería igualmente que, establecida la verdad del directo y la de su contrario, se deduce en seguida la exactitud de los recíprocos de ambos.

En general, sobre una tesis cualquiera pueden formularse las cuatro proposiciones siguientes:

	Hipótesis	*Tesis*
Directo	Si A es B;	C es D
Recíproco	Si C es D;	A es B
Contrario	Si A no es B;	C no es D
Contrario del recíproco o recíproco del contrario.	Si C no es D;	A no es B.

Debiendo observar que *contrario del recíproco y recíproco del contrario* son una misma cosa.

Pero una proposición puede considerarse siempre como *recíproca* de su proposición recíproca y *contraria* de su proposición contraria, siendo, por lo tanto, indiferente atribuir el nombre de *directa* a cualquiera de aquellas cuatro proposiciones; de lo cual se deduce que basta demostrar directamente dos cualesquiera de ellas, con tal que la una sea recíproca o contraria de la otra, para que resulten ciertas las otras dos; es decir, deben demostrarse el *directo y el recíproco; o el directo y su contrario.* Estas dos combinaciones son las más usadas por ser las más cómodas.

46. **Teoremas contrarrecíprocos. Demostraciones por reducción al absurdo.** — Dos teoremas se llaman *contrarrecíprocos cuando cada* uno de ellos es el contrario del recíproco (o bien el recíproco del contrario) del otro.

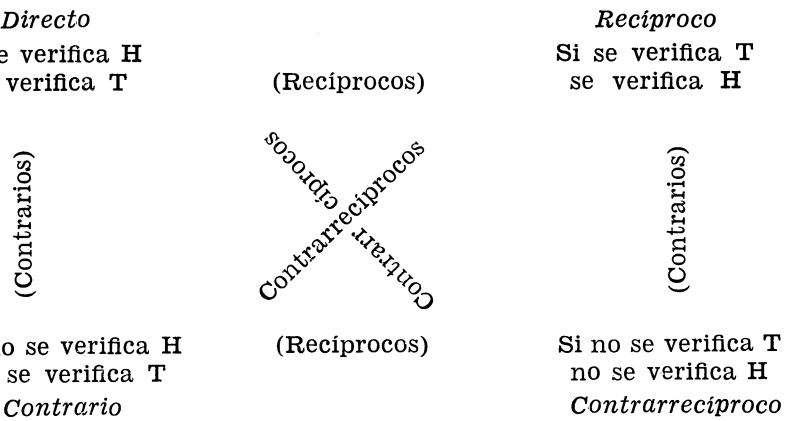
Para formar un enunciado contrarrecíproco de otro dado, basta negar la hipótesis y la tesis e invertirlas. Así, si la proposición dada es "Si dos rectas son perpendiculares forman entre sí ángulos rectos", su contrarrecíproca dirá "Si dos rectas no forman entre sí ángulos rectos no son perpendiculares". En efecto, si lo fueran formarían entre sí ángulos rectos, contra lo propuesto. El razonamiento es completamente general: *Dos teoremas o proporciones contrarrecíprocas son equivalentes.* La certeza de uno implica la certeza del otro; es decir, supuesto demostrado que: *si se verifica H se verifica T* queda probado el contrarrecíproco: *Si no se verifica T no se verifica H.*

Pues de verificar H se verificaría también T, contra lo supuesto.

DEMOSTRACIÓN POR REDUCCIÓN AL ABSURDO es aquella que para probar un teorema prueba su contrarrecíproco.

EJEMPLO. — *Todo punto que no pertenece a la mediatriz de un segmento no equidista de los extremos del segmento.* En efecto, si equidistara, pertenecería a la mediatriz, lo cual va contra lo supuesto.

47. **Esquema lógico de las relaciones entre teoremas directos, recíprocos, contrarios y contrarrecíprocos.**



Expresando en otra forma lo dicho anteriormente, se tiene que: *si son ciertos dos teoremas de una misma horizontal (recíprocos) o vertical (contrarios) son también ciertos los otros dos (contrarrecíprocos de ellos).*

48. **Principio general de reciprocidad.** — *Si sobre una cuestión se han hecho todas las hipótesis admisibles* H_1, H_2, H_3, ... H_n, *conduciéndonos a teoremas ciertos y distintos, cuyas tesis* T_1, T_2, T_3, ... T_n *se excluyen entre sí, sus recíprocos son también ciertos.* En efecto, si se verifica T_3 debe verificarse H_3, pues de no verificarse H_3, se verificaría cualquiera de las hipótesis H_1, H_2, H_4, ... H_n, que son admisibles, y, por tanto, en virtud de los teoremas directos, se verificarán T_1, ó T_2, ó T_4, ... ó T_n, lo cual excluiría el supuesto de verificarse T_3.

EJEMPLO. — *Si desde un punto fuera de una recta se trazan a ésta la perpendicular y varias oblicuas, se verifica:* 1.° *La perpendicular es menor que cualquier oblicua;* 2.° *Las oblicuas cuyos pies equidistan del pie de la perpendicular son iguales;* 3.° *De dos oblicuas, aquella cuyo pie dista más del pie de la perpendicular es mayor.*

Aquí se han hecho todas las hipótesis admisibles que conducen a tres teoremas ciertos y distintos, cuyas tesis se excluyen entre sí, luego por el *principio general de reciprocidad* sus recíprocos también son ciertos; y, además, es fácil demostrarlos por reducción al absurdo. Hágalo el alumno.

49. **Condición necesaria y suficiente.** — Supongamos demostrado un teorema directo (si se verifica H se verificará T) y su recíproco (si se verifica T, se verificará H).

Según el directo, es *suficiente* que H se cumpla para que se verifique T.

Luego: por la verdad del directo *H será condición suficiente para la verdad de T.*

Según el recíproco, siempre que se verifique T, *necesariamente* se verificará H, es decir, H será como consecuencia de T, una condición *necesaria* para que T sea verdadera. Luego:

Por la verdad del recíproco, *H será condición necesaria para la verdad de T.*

Con los teoremas directo y recíproco demostrados tendremos en H la condición necesaria y suficiente para la verdad de T. El mismo resultado se obtiene si un teorema y su contrario son verdaderos. Por consiguiente:

Se puede asegurar que una condición H es la necesaria y suficiente para que sea verdadera una tesis T, si de los cuatro teoremas que pueden establecerse con H y T, se demuestran dos de ellos recíprocos entre sí o contrarios entre sí.

EJERCICIOS

1. ¿Qué propiedades se emplearon en la demostración del teorema o fórmula que da el área de una esfera? Analícese a su vez estas propiedades, y establézcase una cadena deductiva de demostraciones.
2. ¿Qué propiedades se aplicaron en la regla que da el cociente de dos polinomios ordenados?
3. Demostrar que el producto de dos números impares es impar. Enunciar los teoremas recíproco, contrario y contrarrecíproco, y decir cuáles son ciertos.
4. Enunciar los teoremas del número anterior bajo la forma de condición necesaria y suficiente.
5. Enunciar los teoremas de las posiciones relativas de dos circunferencias según sea la distancia entre los centros en relación con la suma y diferencia de los radios. Enunciar los recíprocos.
6. ¿Es condición necesaria y suficiente para que un número sea divisible por 5, que termine en 5?
7. Para que un cuadrilátero sea rectángulo, ¿es condición necesaria y suficiente que tenga sus dos diagonales iguales?

6

Determinantes

50. **Inversiones en las permutaciones.** — Si fijamos un cierto orden de sucesión entre M elementos dados, que supondremos es el alfabético, si son letras distintas, o el de la serie natural, si son números o tienen índices numéricos, se llama *permutación principal* aquella en que los elementos se siguen en el orden establecido.

En otra permutación cualquiera, dos elementos, consecutivos o no, presentan una *sucesión* cuando en ella se siguen en el mismo orden establecido, y presentan una *inversión* si en ella se siguen en orden contrario al establecido.

Así, si los elementos se indican con a_1, a_2, a_3, a_4, y si admitimos $a_1\ a_2\ a_3\ a_4$ como permutación principal, cada uno de sus elementos forma sucesión con cada uno de los siguientes. Pero en la permutación $a_3\ a_1\ a_4\ a_2$ el elemento a_3 forma inversión con a_1 y a_2, y el a_4 con a_2; por tanto, esta permutación presenta tres inversiones. Para hallar todas las inversiones de una permutación se suman las que forman cada elemento con todos los que le siguen.

Una permutación se llama de *clase par* o de *clase impar,* o más brevemente, *par* o *impar,* según que contenga un número par o impar de inversiones. La $a_3\ a_1\ a_4\ a_2$ es impar, por tener 3 inversiones.

51. **Cambio de dos elementos en una permutación.** — *Si en una permutación cambian entre sí de lugar dos elementos, la permutación cambia de clase.*

Primer caso. Supongamos que dichos elementos a_i y a_j son consecutivos en la permutación dada.

Representamos por A el conjunto de todos los elementos anteriores a ambos, y por B a todos los posteriores a ambos. La permutación dada se escribirá:

$$A\ a_i\ a_j\ B$$

y después de cambiar entre sí de lugar, se tendrá:

$$A\ a_j\ a_i\ B.$$

Por una parte se conservarán todas las inversiones que formaban entre sí los objetos que componen A y las de éstos con los siguientes, y, por otra parte, las que formaban los de B entre sí y con los que les preceden. Lo único que se ha modificado es el número de inversiones del par a_i a_j; si antes formaban una inversión, ahora no, y recíprocamente, o sea, el número total de inversiones de la permutación disminuye o aumenta en una unidad, y, por tanto, cambia de clase.

Segundo caso. Si a_i y a_j no son consecutivos, sino que entre ellos hay h elementos, cuyo conjunto representamos por M, la permutación dada se escribirá:

$$A\ a_i\ M\ a_j\ B.$$

Haciendo avanzar h lugares a a_i, es decir, intercambiándole sucesivamente con los h elementos de M, se tiene:

$$A\ M\ a_i\ a_j\ B$$

y haciendo ahora retroceder $h + 1$ lugares a a_j, tendremos:

$$A\ a_j\ M\ a_i\ B.$$

El número total de cambios de clase de la permutación por cambio de dos elementos no consecutivos, será $h + h + 1 = 2h + 1$, esto es, un número impar; luego ambas permutaciones son de distinta clase, como queríamos demostrar.

52. **Número de permutaciones pares e impares.** — *Entre las* m! *permutaciones de* m *elementos, hay* $\frac{m!}{2}$ *pares y* $\frac{m!}{2}$ *impares.*

En efecto, supuestas formadas las m! permutaciones de estos m elementos, pueden asociarse de dos en dos (su número es par, ya que en m! entra el 2 como factor), reuniendo en cada grupo las que sólo difieran en la posición de dos elementos cualesquiera (por ejemplo, los dos primeros), y como las permutaciones de cada grupo son de distinta clase (número 51), habrá tantas pares como impares, y además tantas de cada clase como grupos hayamos formado, es decir, $\frac{m!}{2}$.

Así, agrupando de este modo las permutaciones de 3 elementos resulta:

123 132 231
213 312 321.

Las dos de cada grupo difieren sólo en los dos primeros elementos. Luego una es par y la otra impar.

53. Matrices y determinantes: Definiciones y notaciones. — *Matriz* es un cuadro de m n números dispuestos en m *columnas* (verticales) y n filas (horizontales). Así:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nm} \end{array} \qquad (1)$$

Si $m \neq n$, la matriz se llama *rectangular;* si $m = n$, se llama *cuadrada.* En adelante nos referiremos exclusivamente a las matrices cuadradas.

Elementos de la matriz son los m n números que la forman; los dos índices i, j, de un elemento a_{ij}, denotan, respectivamente, el orden de la horizontal y vertical de la matriz que se cruzan en dicho elemento.

Diagonal principal de una matriz cuadrada es la formada por los elementos cuyos dos índices son iguales, es decir, a_{11} a_{22} ... a_{nn} y va de la parte izquierda superior a la parte derecha inferior.

Diagonal secundaria es la formada por los elementos a_{1n} a_{2n-1} ... a_{n1}, en cada uno de los cuales la suma de los índices vale $n + 1$ y va de la parte superior derecha a la parte inferior izquierda.

Elementos conjugados son dos elementos, a_{ij} y a_{ji}, afectados de los mismos índices cambiados de lugar. Son simétricos respecto de la diagonal principal. Por ejemplo, en la matriz (1) son conjugados los elementos a_{12} y a_{21}, a_{13} y a_{31}, a_{22} y a_{32}, etcétera.

DETERMINANTE *de una matriz cuadrada es el polinomio que resulta de la suma algebraica de todos sus términos.*

TÉRMINO *de un determinante es el producto de* n *elementos de la matriz, tomados de modo que entre uno solo de cada fila y uno solo de cada columna, precedido del signo + o —, según que las permutaciones de los índices que indican filas o columnas sean de la misma o de distinta clase.*

Un determinante se representa escribiendo la matriz correspondiente entre dos barras.

En el determinante de cuarto orden:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

el término $a_{21}\ a_{42}\ a_{13}\ a_{34}$ es negativo, pues la permutación de los indicadores de fila 2 4 1 3 es impar, y la de los indicadores de columna 1 2 3 4 es par. Pero el término $a_{31}\ a_{42}\ a_{23}\ a_{34}$ es positivo porque ambas permutaciones son pares.

54. **Teorema sobre el signo de cada término de un determinante.** *El signo que corresponde a cada término del determinante de una matriz no depende del orden de sus factores.*

En efecto, si permutamos dos factores cualesquiera en un término, cambian de clase las permutaciones de los indicadores de filas y de columnas (número 51); luego si antes eran de la misma clase seguirán siéndolo después de cambiar entre sí de lugar, y si eran de distinta clase, igual sucederá después.

55. **Consecuencias.** — 1.ª Podemos ordenar los elementos de cada término de modo que los indicadores de filas se sucedan en el orden *natural*. Entonces la permutación de los indicadores de filas será de clase par en todos los términos, y, por tanto, para tener el signo de éstos bastará conocer la clase de la permutación de los indicadores de columna, que si es par será + y si es impar será —.

Así el término $a_{33}\ a_{51}\ a_{45}\ a_{24}\ a_{12}$ podemos escribirlo $a_{12}\ a_{24}\ a_{33}\ a_{45}\ a_{51}$ que llevará el signo — por ser de clase impar la permutación 2 4 3 5 1 de los indicadores de columna.

2.ª *El número de términos de un determinante de orden* n *es* n!, *siendo la mitad positivos y la otra mitad negativos.*

En efecto, si ordenamos los elementos de los términos del determinante según los indicadores de filas, obtendremos todos los términos posibles tomando para los indicadores de columna todas las *n!* permutaciones de sus índices. Pero de éstas, la mitad son pares y la otra mitad impares. Luego queda demostrado el enunciado.

De aquí que también adoptemos para un determinante de orden *n* la siguiente representación:

$$\Delta = \Sigma\ [\pm (a_{31}\ a_{22}\ a_{33}\ a_{44} \ldots a_{nn})].$$

El sumatorio Σ representa en este caso los términos que se obtienen de la diagonal principal permutando los indicadores de columnas de todos los modos posibles y poniendo a cada uno el signo + o —, según que la permutación correspondiente sea de la misma o de distinta clase que la principal.

3.ª En lugar de ordenar los elementos de cada término, según los indicadores de fila, podemos ordenarlos según los indicadores de co-

lumna y hacer las permutaciones con los indicadores de filas, con lo cual no varía ni el número de términos, ni el valor, ni el signo de cada uno.

56. **Determinante de segundo orden.** — Sea el determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Aplicando las definiciones anteriores, vemos que consta únicamente de dos términos $a_{11}\ a_{22}$ y $a_{12}\ a_{21}$, el primero de signo + y el segundo de signo —. Luego:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\ a_{22} - a_{12}\ a_{21}.$$

El primer término del desarrollo está formado por los elementos de la diagonal principal y el segundo término por los elementos de la diagonal secundaria.

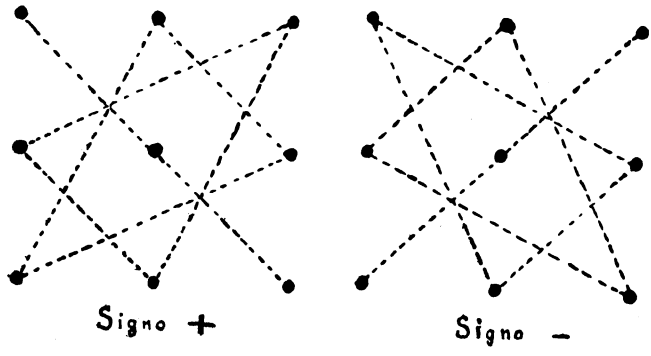
57. **Determinante de tercer orden.** — Sea el determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Obtendremos todos los términos, según la consecuencia 1.ª del número 55, dejando fijos los indicadores de filas y permutando los de columnas de todos los modos posibles. Como 3! = 6, saldrán los seis términos siguientes:

$+ a_{11}\ a_{22}\ a_{33}$	por ser	123	permutación	par
$+ a_{12}\ a_{23}\ a_{31}$	"	"	231	"	"
$+ a_{13}\ a_{21}\ a_{32}$	"	"	312	"	"
$- a_{13}\ a_{22}\ a_{31}$	"	"	321	"	impar
$- a_{12}\ a_{21}\ a_{33}$	"	"	213	"	"
$- a_{11}\ a_{23}\ a_{32}$	"	"	132	"	"

Este resultado se resume en la *Regla de Sarrus,* que está expresada en los siguientes esquemas; el primero da tres términos positivos y el segundo tres negativos:



Ejemplo. — *Hallar el valor del siguiente determinante:*

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 1 & 0 & 7 \\ -3 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot 2 + 7 \cdot 4 \cdot (-3) + (-6) \cdot 1 \cdot 5 - (-6) \cdot 0 \cdot (-3) - \\ - 7 \cdot 5 \cdot 2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 0 - 84 - 30 - 0 - 70 - 8 = \mathbf{-192.}$$

EJERCICIOS

Hallar el valor de cada uno de los siguientes determinantes:

1. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 5 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix} a & -a & -a \\ b & b & -b \\ c & -c & c \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \\ 3 & -6 & 3 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -2 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 1 & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & -3 & \frac{4}{3} \end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{3}{4} & -2 \\ \frac{2}{3} & -3 & 4 \\ 3 & 5 & \frac{-1}{5} \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} -1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & -1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & -1 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ 11. $\begin{vmatrix} 7 & 15 \\ 21 & 8 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ \hline 2 & 5 \\ & 2 \\ 6 & \hline 7 \end{vmatrix}$ 13. $\begin{vmatrix} 0'5 & 2'7 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ \hline 2 & 2 \\ 3 & 7 \\ \hline 5 & 5 \end{vmatrix}$ 15. $\begin{vmatrix} 8'3 & 10'5 \\ 5'6 & 3 \end{vmatrix}$

Por desarrollo del determinante, hallar el valor de x en cada una de las siguientes ecuaciones:

16. $\begin{vmatrix} x & -4 & x \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$ 17. $\begin{vmatrix} x+2 & -2 & 1 \\ x+1 & 0 & 1 \\ x & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

18. $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 4 \\ x & 5 & -3 \\ 3 & 3 & x \end{vmatrix} = 5.$

7

Propiedades de los determinantes

58. **Producto por un número.** — *Si todos los elementos de una fila o columna se multiplican por un mismo número* k, *el determinante queda multiplicado por* k.

Porque todo término del determinante tendrá un factor multiplicado por k, que se saca factor común.

Esto se expresa simbólicamente:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & ka_{nn} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 2 & 4 \\ 10 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2.2 & 5 & 3 \\ 2.3 & 2 & 4 \\ 2.5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 2. \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

Según se ve en el ejemplo, esta propiedad permite sacar fuera del determinante los factores comunes de todos los elementos de una fila o columna.

59. **Cambio de dos líneas paralelas entre sí.** — *Si se cambian entre sí dos líneas paralelas (dos filas o dos columnas), el determinante cambia de signo, pero no de valor absoluto.*

Permutemos, por ejemplo, la segunda con la tercera fila y demostraremos que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

o sea:

$$\Delta = -\Delta'.$$

En efecto, en Δ la diagonal principal es $a_{11}\ a_{22}\ a_{33}\ \ldots\ a_{nn}$, y los restantes términos se obtienen permutando los indicadores de filas de todos los modos posibles y poniendo signo + a las que sean de igual clase que la permutación principal, o sea a las pares, y signo — a las impares. Del mismo modo en Δ' la diagonal principal es $a_{11}\ a_{32}\ a_{23}\ \ldots\ a_{nn}$, y los restantes términos se obtendrán permutando los indicadores de filas de todos los modos posibles y poniendo signo + a las que sean de igual clase que la principal, 132 ... n, o sea a las impares, y signo — a las de distinta clase, o sea a las pares.

Luego, como siguen existiendo los mismos términos, aunque con signo contrario, el valor absoluto del determinante no varía. Por tanto $\Delta = -\Delta'$.

Si las filas permutadas no son consecutivas, podemos aplicar la segunda parte del número 51, y obtendremos la misma conclusión anterior.

60. **Determinantes nulos.** — 1.° *Si en un determinante son nulos los elementos que forman una fila o columna, el determinante es nulo.*

Porque según la definición de determinante, cada uno de sus términos tendría un factor nulo, y por tanto cada término sería nulo.

2.° *Si una matriz tiene dos filas o dos columnas iguales el determinante es nulo.*

Pues cambiándolas entre sí, el determinante queda el mismo; pero, por otro lado, debe cambiar de signo. Luego sería $\Delta = -\Delta$, o sea, $2\Delta = 0$, y $\Delta = 0$.

3.° *Si los elementos correspondientes de dos filas o dos columnas son proporcionales, el determinante es nulo.*

En efecto, si es λ el factor de proporcionalidad, sacándole factor común, quedará otra matriz con dos líneas paralelas idénticas, cuyo determinante es nulo. Así, si en el determinante de tercer orden se verifica que:

$$\frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{21}} = \frac{a_{32}}{a_{31}} = \lambda$$

se tendrá:

$$a_{12} = \lambda\, a_{11};\quad a_{22} = \lambda\, a_{21};\quad a_{32} = \lambda\, a_{31}$$

y

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \lambda\, a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & \lambda\, a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & \lambda\, a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \,.\, 0 = 0.$$

61. **Menor complementario y adjunto de un elemento.** . . *En una matriz de orden* n *se denomina menor complementario del elemento* a_{ik}, *al determinante de la matriz de orden* n — 1, *que resulta de suprimir la fila* l *y la columna* k *a que pertenece aquél. Lo designaremos por* α_{ik}.

Ejemplo. — El menor complementario del elemento a_{32} en el determinante de cuarto orden:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \quad \text{es} \quad \alpha_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

En una matriz se llama *complemento algebraico* o *adjunto* del elemento a_{ik}, a su menor complementario multiplicado por $(-1)^{i+k}$. Lo designaremos por A_{ik}.

Ejemplo. — El adjunto del elemento 3 en el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} \text{es } A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$$

Al adjunto del elemento siguiente, 4, le corresponderá signo +, y al del 7 signo —.

62. **Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea.** — Sea el determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

que queremos desarrollar por los elementos de la primera fila.

Según el número 57 sabemos que:

$$\Delta = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - \\ - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32}.$$

Sacando factor común los elementos de la primera fila en los términos en que se encuentran, se tiene:

$$\Delta = a_{11}\,(a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}) + a_{12}\,(a_{23}\,a_{31} - a_{21}\,a_{33}) + \\ + a_{13}\,(a_{21}\,a_{32} - a_{22}\,a_{31}).$$

Pero observamos que el primer paréntesis no puede contener ningún elemento de la primera fila ni de la primera columna, y en cambio sí todos los demás elementos permutados de todos los modos posibles,

o sea que dicho paréntesis es el menor complementario del término a_{11}. Es decir:

$$(a_{22}\,a_{33} - a_{23}\,a_{32}) = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{11}$$

Del mismo modo los otros paréntesis valen:

$$(a_{23}\,a_{31} - a_{21}\,a_{33}) = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = A_{12}$$

$$(a_{21}\,a_{32} - a_{22}\,a_{31}) = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = A_{13}$$

Por tanto:

$$\Delta = a_{11}\,A_{11} + a_{12}\,A_{12} + a_{13}\,A_{13}.$$

De modo análogo se demuestra para el desarrollo por los elementos de una línea cualquiera.

El valor de un determinante es igual a la suma de los elementos de una línea cualquiera multiplicados por sus adjuntos correspondientes.

Ejemplo. — Desarrollar por los elementos de la cuarta columna el determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 7 & 3 \\ 5 & 0 & 2 & 9 \\ 6 & 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & 0 & 2 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} - 9 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+ 8 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 7 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 73 + 3 \cdot 45 - 9 \cdot 91 + 8 \cdot 58 =$$

$$= -146 + 135 - 819 + 464 = \mathbf{-366}.$$

63. **Corolario.** — *La suma de los productos de los elementos de una línea por los adjuntos de una paralela a ella, es igual a cero.*

Sea el determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Si formamos la suma de los productos de los elementos de la primera columna por los adjuntos A_{13}, A_{23}, ..., A_{n3} de los elementos de la tercera, se tiene:

$$a_{11}\,A_{13} + a_{21}\,A_{23} + a_{31}\,A_{33} + \dots + a_{n1}\,A_{n3}.$$

En virtud del teorema que acabamos de demostrar, esta suma es el desarrollo del determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

por los elementos de la tercera columna. Pero este determinante, por tener dos columnas iguales, es nulo.

EJERCICIOS

Sacar factores comunes en los determinantes:

1. $\begin{vmatrix} 3m & 9m^2 & 12m^3 \\ 2n & 6n^2 & 8n^3 \\ 5p & 15p^2 & 20p^3 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 28a & 14b \\ 21a & 6b \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 10 & 20 & 0 \\ 15 & 32 & 1 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 8 & 9 & -21 \\ 4 & -18 & 49 \\ 24 & 6 & 35 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 0 & 8 & 0 & 2 \\ 2 & -16 & 5 & 4 \\ 0 & 8 & 15 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ o & b^2 & c^2 \\ a^2 & o & c^3 \end{vmatrix}$

Demostrar que son nulos los siguientes determinantes, transformándolos de modo que aparezcan en ellos una línea de ceros:

7. $\begin{vmatrix} 12 & 18 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} a & b \\ \sqrt{7a^2} & \sqrt{7b^2} \end{vmatrix}$

11. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} x & x^2 \\ x^3 & x^4 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} \sqrt{28} & 5 & 2 \\ \sqrt{7} & 0 & 1 \\ \sqrt{63} & 3 & 3 \end{vmatrix}$

12. $\begin{vmatrix} 7 & 3 & 4 \\ -5 & 7 & -12 \\ 12 & 8 & 4 \end{vmatrix}$

Escribir los determinantes que resultan, al cambiar filas por columnas en los siguientes, y calcularlos en las dos formas:

13. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & -15 \end{vmatrix}$

15. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & -8 & 1 \\ 7 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

17. $\begin{vmatrix} m & n & p \\ -1 & x & o \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix}$

14. $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 2 & b & b^2 \\ 3 & c & c^2 \end{vmatrix}$

18. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$

Transformar los siguientes determinantes en otros en que aparezca x como primer término, y decir si los que resultan son o no iguales a los primitivos. Comprobarlo desarrollándolos.

19. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 3 & x & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} r & s & t \\ -4 & 6 & x \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & x \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -10 \end{vmatrix}$

20. $\begin{vmatrix} 5 & b & -2 \\ a & 1 & 3 \\ x & 0 & c \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 7 \\ 3 & x & -3 \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} m & n & 1 \\ m^2 & n^2 & 1 \\ m^3 & n^3 & 1 \end{vmatrix}$

25. Sin desarrollar los determinantes siguientes, indicar por qué son nulos:

A) $\begin{vmatrix} a & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & b \end{vmatrix}$ B) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 10 \end{vmatrix}$ C) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$ D) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 8 & 10 \\ 5 & 7 & 9 & 11 \end{vmatrix}$

Calcular los determinantes siguientes:

26. $\begin{vmatrix} 9 & 7 & 5 & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ 27. $\begin{vmatrix} 4 & 2 & 6 & 0 \\ 6 & 5 & -3 & 2 \\ 8 & -1 & 2 & -3 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & 4 & 13 \\ 2 & 8 & 4 & 11 \end{vmatrix}$ 29. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

30. $\begin{vmatrix} k_1 + 1 & x_1 & y_1 \\ k_2 + 2 & x_2 & y_2 \\ k_3 + 3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$ 31. $\begin{vmatrix} a_1 + x_1 & b_1 + x_2 & c_1 + x_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

32. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -6 & -4 \\ -3 & 5 & 6 & 2 \end{vmatrix}$ 33. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & 4 \\ 5 & -3 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

34. $\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 1 \\ a^2 & 1 & -2 & a \\ -1 & 1 & a & a^2 \end{vmatrix}$ 35. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & -5 & 1 & -2 \\ -1 & -7 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

Resolver las siguientes ecuaciones:

36. $\begin{vmatrix} 15 + 2x & 11 & x \\ 11 + 3x & 17 & -2x \\ 7 + x & 14 & -3x \end{vmatrix} = 0$ 37. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -x & 3 & -1 \\ x^2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$

38. $\begin{vmatrix} a - x & x & 1 \\ a + x & -\frac{x}{2} & -3 \\ x & \frac{x}{3} & 0 \end{vmatrix} = 0$

Descomponer en factores los siguientes determinantes y comprobar los resultados:

39. $\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 \\ b & b^2 & b^3 \\ c & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$ 41. $\begin{vmatrix} a & k a^2 & a^3 \\ b & k b^2 & b^3 \\ c & k c^2 & c^3 \end{vmatrix}$

40. $\begin{vmatrix} n & a & a^2 \\ n & b & b^2 \\ n & c & c^2 \end{vmatrix}$ 42. $\begin{vmatrix} a & b + c & a^2 \\ b & a + c & b^2 \\ c & a + b & c^2 \end{vmatrix}$

8

Sistemas de ecuaciones lineales

64. **Sistemas de ecuaciones: Definiciones.** — Dos o más ecuaciones *forman un sistema* o *son simultáneas* cuando tienen las mismas soluciones.

Sistemas equivalentes son los que tienen las mismas soluciones. *Solución* de un sistema es el conjunto de valores de las incógnitas, que sustituídos en vez de ellas en todas las ecuaciones, las transforman en identidades.

Se dice que una ecuación es *consecuencia* de las ecuaciones de un sistema, cuando toda solución del sistema satisface a la ecuación.

Resolver un sistema de ecuaciones es hallar las soluciones del mismo.

Los sistemas se clasifican en *determinados, indeterminados* y *absurdos* o *incompatibles,* según que tengan un número de soluciones limitado, ilimitado o no tengan ninguna solución.

Se llama *combinación lineal* de dos o más ecuaciones de un sistema a la ecuación que resulta de multiplicar cada una de éstas por un número o una constante distintos de cero, y de sumarlas después algebraicamente. Así, si representamos las ecuaciones abreviadamente por:

$$A_1 = B_1, \quad A_2 = B_2, \quad A_3 = B_3$$

una combinación lineal de las mismas es:

$$m_1 A_1 + m_2 A_2 + m_3 A_3 = m_1 B_1 + m_2 B_2 + m_3 B_3$$

en la que las letras mayúsculas representan polinomios en x, y, z, y las minúsculas, números distintos de cero.

65. **Teorema fundamental de equivalencia de los sistemas de ecuaciones.** — *Si en un sistema de ecuaciones se sustituye una de ellas por una combinación lineal de la misma con varias o todas, el sistema es equivalente al propuesto.*

En efecto, sean los sistemas dado y transformado:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= B_1 \\ A_2 &= B_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ A_n &= B_n \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} m_1 A_1 + m_2 A_2 + \ldots + m_h A_h = \\ = m_1 B_1 + m_2 B_2 + \ldots + m_h B_h \\ A_2 = B_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ A_n = B_n \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

La primera ecuación del sistema (2) es consecuencia de las *h* primeras del sistema (1), ya que toda solución de éste hará idénticos, respectivamente, A_1 y B_1, A_2 y B_2 ... A_h y B_h, así como sus productos por los factores m_1, m_2 ... m_h, siendo, por tanto, idénticas las sumas respectivas; es decir, se verificará la primera ecuación de (2) y como las $n - 1$ restantes son comunes, la solución del sistema (1) lo será del sistema (2).

Recíprocamente, toda solución del sistema (2) nos conducirá a obtener que $A_1 = B_1$, y, siendo comunes las $n - 1$ últimas ecuaciones, será solución del sistema (1), es decir, los sistemas, son equivalentes.

Un método sencillo y cómodo para resolver sistemas de ecuaciones es el que se basa en los determinantes, y se denomina *Regla de Cramer,* hasta el punto de que hoy día no se emplea casi otro, en especial cuando se trata de sistemas de tres o más incógnitas.

66. **Deducción de la regla de Cramer.** — Sea el sistema:

$$(A) \quad \begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 & (3) \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 & (4) \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 & (5) \end{cases}$$

Designemos por Δ el *determinante del sistema,* es decir, el determinante formado por los coeficientes de las incógnitas, escritos en su mismo orden, siempre que no sea nulo dicho determinante.

Se llama *determinante de una incógnita* al que resulta de sustituir, en el del sistema, la columna de los coeficientes de dicha incógnita por los términos independientes o constantes, con los signos que les corresponden cuando están solos en los segundos miembros de las ecuaciones. En el sistema dado los designaremos por Δ_x, Δ_y, Δ_z. Luego por definición:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Multiplicando la ecuación (3) por el adjunto A_1 de a_1, la (4) por el adjunto A_2 de a_2, la (5) por el adjunto A_3 de a_3, se obtiene:

$$\begin{aligned} A_1 a_1 x + A_1 b_1 y + A_1 c_1 z &= A_1 d_1 \\ A_2 a_2 x + A_2 b_2 y + A_2 c_2 z &= A_2 d_2 \\ A_3 a_3 x + A_3 b_3 y + A_3 c_3 z &= A_3 d_3. \end{aligned}$$

Sumando estas ecuaciones y sacando *x, y, z,* factor común de todos los términos en que entren, resulta:

$$\begin{aligned} &(A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3) x + (A_1 b_1 + A_2 b_2 + A_3 b_3) y + \\ &+ (A_1 c_1 + A_2 c_2 + A_3 c_3) z = A_1 d_1 + A_2 d_2 + A_3 d_3. \end{aligned}$$

Siendo esta ecuación una combinación lineal de las tres ecuaciones del sistema dado, puede reemplazar a cualquiera de ellas. Además en esta tranformada el segundo miembro es Δ_x, desarrollado por la columna de las *d*; el coeficiente de *x* es Δ, desarrollado por la columna de las *a;* y los demás paréntesis son nulos, según el número 63. Queda, pues:

$$\Delta \cdot x = \Delta_x; \text{ de donde } x = \frac{\Delta_x}{\Delta}.$$

Haciendo lo mismo con los adjuntos B_1, B_2, B_3, de b_1, b_2, b_3, se llega a:

$$\Delta \cdot y = \Delta_y; \text{ de donde } y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

Y luego, operando con los adjuntos C_1, C_2, C_3, de c_1, c_2, c_3, se llega a:

$$\Delta \cdot z = \Delta_z; \text{ de donde } z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Luego hemos obtenido para valores de las incógnitas x, y, z, las tres expresiones:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \qquad (6)$$

De aquí la regla de Cramer, que dice:

1.° *Todo sistema lineal de* n *ecuaciones, no homogéneas, con* n *incógnitas, cuyo determinante no es nulo, tiene una solución única.*

2.° *El valor de cada incógnita es el cociente de dividir su determinante por el determinante del sistema.*

67. **Discusión general.** — Al aplicar la regla de Cramer a un sistema de n ecuaciones lineales, no homogéneas, con n incógnitas, pueden darse los siguientes casos:

1.° Que el denominador $\Delta \neq 0$; entonces el sistema es *compatible* y admite como solución única los resultados obtenidos por la regla. Por tanto es *determinado* y sus ecuaciones son *independientes*.

2.° Que siendo $\Delta = 0$, también sean nulos los numeradores Δ_x, Δ_y, Δ_z; en este caso se llega al resultado $\frac{0}{0}$, lo que quiere decir que el sistema es *indeterminado*. Si $x = \frac{0}{0}$, ello equivale a $x \cdot 0 = 0$, ecuación que se satisface para *infinitos* valores de x, pues cualquier número multiplicado por 0 da 0; las ecuaciones son *dependientes* o *combinaciones lineales* unas de otras.

3.° Si $\Delta = 0$, no siendo nulos Δ_x, Δ_y, Δ_z es decir, los numeradores, se tendría:

$$x = \frac{\Delta_x}{0}; \quad y = \frac{\Delta_y}{0}; \quad z = \frac{\Delta_z}{0}$$

y el sistema es *imposible* o *incompatible*. Ningún número x multiplicado por 0 puede dar un número finito Δ_x. Las ecuaciones son en este caso *contradictorias*.

Ejemplo 1. — *Resolver el sistema:*

$$\left.\begin{array}{l} 4x - 5y + 2z = 4 \\ 5x + 4y - 3z = 35 \\ 7x - 2y - 4z = 19 \end{array}\right\}$$

El determinante del sistema es distinto de cero, y vale:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & 4 & -3 \\ 7 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -159.$$

Los determinantes de las incógnitas x, y, z, son:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 35 & 4 & -3 \\ 19 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -795; \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 5 & 35 & -3 \\ 7 & 19 & -4 \end{vmatrix} = -636;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 4 & -5 & 4 \\ 5 & 4 & 35 \\ 7 & -2 & 19 \end{vmatrix} = -318.$$

Luego

$$x = \frac{-795}{-159} = 5; \quad y = \frac{-636}{-159} = 4; \quad z = \frac{-318}{-159} = 2.$$

Antes de aplicar las fórmulas (6) es necesario escribir todas las ecuaciones exactamente en la misma forma que las dadas en el sistema (A) del mismo número.

Si falta algún término se le suple poniéndole coeficiente cero.

Ejemplo 2. — *Resolver el siguiente sistema por medio de determinantes:*

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= -19 \\ 3y + 4z &= -7 \\ 2z - 5x &= 2 \end{aligned}$$

Solución: Primero, escribamos las ecuaciones en la forma debida, suplien-do todas las letras que faltan y poniendo a cada una de ellas el coeficiente cero: Así:

$$\begin{aligned} 2x - 5y + 0.z &= -19 \\ 0.x + 3y + 4z &= -7 \\ -5x + 0.y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

Se tiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 112; \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} -19 & -5 & 0 \\ -7 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -224;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -19 & 0 \\ 0 & -7 & 4 \\ -5 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 336; \qquad \Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -5 & -19 \\ 0 & 3 & -7 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 448.$$

Luego:

$$x = \frac{-224}{112} = -2; \quad y = \frac{336}{112} = 3; \quad z = \frac{-448}{112} = -4.$$

EJERCICIOS

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por medio de determinantes:

1. $\begin{aligned} 6x + 4y - 7z &= 17 \\ 9x + 7y - 16z &= 29 \\ 10x + 5y - 3z &= 23 \end{aligned}$

2. $\begin{aligned} -4x + 5y + 9z &= 13 \\ -5x + y + 2z &= -5 \end{aligned}$

3. $\begin{aligned} 5x + 3y + 2z &= \frac{9}{8} \\ 4x - 5y - \frac{2}{3}z &= -1 \\ 8x - \frac{1}{2}y + z &= \frac{7}{12} \end{aligned}$

4. $\begin{aligned} x - y &= 2a \\ -ax + z &= -a^2 \\ bx - z &= b^2 \end{aligned}$

5. $\begin{aligned} 2x - 3y - 4z &= 4 \\ 3x + 5y + 7z &= 12 \\ 5x - y + 8z &= 5 \end{aligned}$

6. $8x + 4y - 3z = 6$
$x + 3y - z = 7$
$4x - 5y + 4z = 8$

7. $x - y - 8 = 0$
$-y + z - 28 = 0$
$x + z - 14 = 0$

8. $\frac{1}{2}(x - z - 5) = y + z$
$\frac{1}{2}(x - z - 5) = 2x - 11$
$2x - 11 = 9(x - 2z)$

9. $x + \frac{y}{5} = 6$

$-y - \frac{z}{7} = 8$

$z - \frac{x}{2} = 10$

10. $ax + by = 4$
$by + cz = 4$
$cz + ax = -4$

11. $x + y + z = 8$
$x - y = 20$
$-y - z = 4$

12. $7x + 5y - 8z = 2$
$-6x + 2y - 5z = 6$
$21x + 15y - 24z = 9$

13. $4x + 3y - 4z = 0$
$5x - 6y + 10z = 7$
$x + 2z = 1$

14. $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + 4 = 0$

$-\frac{1}{y} - \frac{1}{z} + 1 = 0$

$\frac{2}{z} + \frac{3}{x} = 14$

15. $\frac{1}{2x} + \frac{1}{4y} + \frac{1}{3z} = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{x} = \frac{1}{3y}$

$\frac{1}{x} - \frac{1}{5y} - \frac{4}{z} = 2\frac{2}{15}$

16. $-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 36$

$-\frac{1}{x} + \frac{3}{y} - \frac{1}{z} = 28$

$-\frac{1}{x} + \frac{1}{3y} + \frac{1}{2z} = 20$

17. $-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 9$

$-\frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$

$-\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 1$

18. $5x - 2y = 16$
$2x - y = 7$

19. $-2ay + 3bx - 3ab = 0$

$3ay + 4bx - \frac{7}{6}ab = 0$

20. $\frac{m - n}{2} - \frac{m + n}{3} = 8$

$\frac{m - n}{3} + \frac{m + n}{4} = 11$

21. $3x - 3y - 4z = 20$
$6x + 2y + 7z = 5$
$2x - y - 8z = 45$

22. $3x + 5y + 2z = 14$
$5x + 8y + z = 12$
$x + 3y + 3z = 1$

23. $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = a$

$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = b$

$-\frac{1}{y} + \frac{1}{z} - \frac{1}{x} = c$

24. $$-\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{a}=0$$
$$-\frac{1}{x}+\frac{1}{z}-\frac{1}{b}=0$$
$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-\frac{1}{c}=0$$

25. $$\begin{aligned} u-x+y&=6\\ -x+y+z&=7\\ y+z+u&=8\\ z+u-x&=9\end{aligned}$$

26. $$\begin{aligned} 3u+x+2y+z&=-10\\ 2u-3x+y-z&=-18\\ 5u+2x-y+3z&=3\\ 4u-x-3y-2z&=-1\end{aligned}$$

27. $$\begin{aligned} x+y&=2\\ x-z&=3\\ y-z&=-1\end{aligned}$$

28. $$\begin{aligned} -4x-4y&=b+4z\\ 6y+2x&=b+2z\\ 7z-y&=b-x\end{aligned}$$

29. $$\begin{aligned} -x+y&=a\\ y+z&=b\\ x+w&=c\\ 2w-x&=d\end{aligned}$$

30. $$\begin{aligned} -2x-y+z&=5\\ y-2z-5u&=6\\ -x+y+z+u&=2\\ -x-2y+5u&=6\end{aligned}$$

31. $$\begin{aligned} -x+y+z-u&=11\\ -x+y-z+u&=17\\ -x-y+z+u&=9\\ +x+y+z+u&=12\end{aligned}$$

32. $$x+20=\frac{3y}{2}+10$$
$$\begin{aligned} x+20&=-2z+5\\ -2z+5&=110-(y-z)\end{aligned}$$

33. Las edades de tres personas sumadas dos a dos dan 18, 24 y 36. Hallarlas.

34. Hallar cuatro números tales que si se suma cada uno de ellos con la media aritmética de los otros tres, dan como resultado 87, 69, 63 y 51 respectivamente.

35. Hallar un número compuesto de dos cifras tales que su suma sea 9, sabiendo que al invertir el orden de sus cifras disminuye su valor en 45 unidades.

36. Hallar dos números tales que su diferencia, su suma y su producto sean proporcionales a los números 1, 5 y 18.

37. El resto de la división de dos números es 5, y el cociente igualmente 5. Hallar dichos números sabiendo que su diferencia es 257.

38. Un padre decía a su hijo: "Hoy tu edad es 1/3 de la mía y dentro de 13 años será justamente 1/2. ¿Qué edad tenemos cada uno?"

39. Una persona reparte cierta cantidad de dinero entre los pobres. Si hubiera 2 pobres menos, a cada uno le correspondería 13 ptas., y si hubiera 4 pobres más, le tocaría a cada uno 10 ptas. Hallar el número de pobres y la cantidad repartida.

40. Un obrero ha trabajado en dos talleres durante 38 días. En el primero le pagan 63 ptas. diarias, y en el segundo 55'50 ptas. diarias. ¿Cuántos días ha trabajado en cada taller sabiendo que en total ha cobrado 2296'50 ptas.?

9

Logaritmos

68. **Definición de logaritmo.** — *Dados dos números positivos* b *e* y, *siendo* b *distinto de* 1, *se llama logaritmo en base* b *de* y *aquel número* x *a que hay que elevar* b *para obtener* y.

Así, ya que $2^7 = 128$, $\log_2 128 = 7$. Esto se lee. "El logaritmo de 128 en la base 2 es 7".

La relación entre la base b, el número y el logaritmo x puede expresarse en cualquiera de las siguientes formas:

$$b^x = y$$
$$\log_b y = x.$$

La última igualdad se lee: "El logaritmo del número y en la base b es x", y la anterior expresa que x es el exponente a que hay que elevar la base b para obtener y.

69. **Logaritmos vulgares.** — Se llama así a los que tienen como base el número 10, que son los que más se usan en el cálculo.

Los logaritmos vulgares simplifican y abrevian muchos las operaciones, pues como más adelante veremos, reducen las multiplicaciones a sumas, las divisiones a restas, las potencias a multiplicaciones y las raíces a divisiones. Al expresar los logaritmos vulgares, generalmente la base 10 no se escribe; pero si es otra base debe indicarse. Así, $\log_{10} 100 = 2$, de ordinario se escribe abreviadamente $\log 100 = 2$.

En la tabla que sigue, la primera columna contiene los números; la segunda, las potencias de 10 iguales a los números, y la tercera, los exponentes o *logaritmos vulgares:*

N	Potencias	Logaritmos
10000	10^4	4
1000	10^3	3
100	10^2	2
10	10^1	1
1	10^0	0
0'1	10^{-1}	— 1
0'01	10^{-2}	— 2
0'001	10^{-3}	— 3
0'0001	10^{-4}	— 4

70. **Logaritmos de los números que no son potencias exactas de 10.** La tabla del número anterior contiene sólo números que son potencias exactas de 10. Se ve que los logaritmos de tales números son números enteros positivos o negativos. Los logaritmos de los números que no son potencias de 10 constan de una parte entera y de una parte decimal. Así, para todos los números entre 10 y 100, los logaritmos son mayores que 1 y menores que 2. Se sigue que el logaritmo de 63 es 1 más una parte decimal. Análogamente, el logaritmo de 485 es 2 más una parte decimal, porque 485 está entre 100 y 1000.

71. **Característica y mantisa.** — La parte *entera* de un logaritmo se llama *característica;* la parte decimal se llama *mantisa* del logaritmo. Del examen de la tabla del número 69 se deduce que la característica de los logaritmos de todos los números entre 1 y 10 es 0; entre 10 y 100 es 1; entre 100 y 1000 es 2; entre 1000 y 10000 es 3; entre 10000 y 100000 es 4; entre 1 y 0'1 es — 1; entre 0'1 y 0'01 es — 2, etcétera. De aquí se derivan las reglas siguientes:

1.ª *La característica del logaritmo de un número mayor que* 1 *es un entero positivo, igual al número de cifras existentes a la izquierda de la coma, disminuído en una unidad.*

2.ª *La característica del logaritmo de un número menor que* 1 *es un entero negativo, cuyo valor absoluto es igual al lugar que ocupa la primera cifra significativa después de la coma.*

Así, la característica del logaritmo de 104'31 es 2; la de 0'0057 es — 3; la de 14567 es 4.

Se ha convenido que la mantisa sea siempre positiva, cualquiera que sea el signo de la característica.

Por ello se colocan las características negativas — 1, — 2, — 3, etcétera, con el signo — encima. Por ejemplo:

$$\log 0'175 = -1 + 0'2430 = \bar{1}'2430$$

y

$$\log 0'0175 = -2 + 0'2430 = \bar{2}'2430.$$

72. **El valor de la mantisa es independiente de la posición de la coma.** — Sea:

$$x = \log y, \quad \text{esto es} \quad y = 10^x.$$

Dividiendo ambos miembros por 10^n, donde n es un número entero, queda:

$$\frac{y}{10^n} = \frac{10^x}{10^n} = 10^{x-n}$$

o sea:

$$x - n = \log \frac{y}{10^n}$$

lo que demuestra el teorema, por ser n entero.

Así:

$$10^{0'2430} = 1'75, \quad \text{o sea,} \quad \log 1'75 = 0'2430$$
$$10^{0'2430-1} = 0'175, \quad \text{o sea,} \quad \log 0'175 = 0'2430 - 1 = \bar{1}'2430$$
$$10^{0'2430-2} = 0'0175, \quad \text{o sea,} \quad \log 0'0175 = 0'2430 - 2 = \bar{2}'2430.$$

Así, pues, la división por una potencia de 10 cambia la posición de la coma en el número y el valor de la característica del logaritmo, pero deja invariable la mantisa. Luego los números 175, 17'5, 1'75, 0'175, etcétera, tienen la misma mantisa. O sea, *todos los números que tengan las mismas cifras significativas en el mismo orden tienen la misma mantisa.*

73. **Propiedades generales de los logaritmos.** — De los números anteriores se deducen las siguientes propiedades generales, siempre que $b > 1$.

1.° *El logaritmo de la base es* 1:

$$\log_b b = 1, \text{ pues } b^1 = b.$$

2.° *El logaritmo de* 1 *es* 0:

$$\log_b 1 = 0, \text{ pues } b^0 = 1.$$

3.° *Los números mayores que* 1 *tienen logaritmo positivo.*

4.° *Los números menores que* 1 *tienen logaritmo negativo.*

5.° *El logaritmo de* 0 *es menor que cualquier número* $-H$, *por grande que sea* H. Pues:

$$b^{-H} = \frac{1}{b^H} > 0.$$

Esto se expresa diciendo que *el logaritmo de* 0 *es* $-\infty$.

6.° *Los números negativos no tienen logaritmo real.* Pues cualquiera que sea el exponente, toda potencia de un número positivo es otro número positivo.

74. **Obtención de la mantisa: Tablas de logaritmos.** — Como las mantisas son difíciles de calcular en cada momento que se necesiten, se han dispuesto ordenadas en las llamadas *tablas de logaritmos,* en las cuales por costumbre se omite la coma. Estas tablas se llaman de

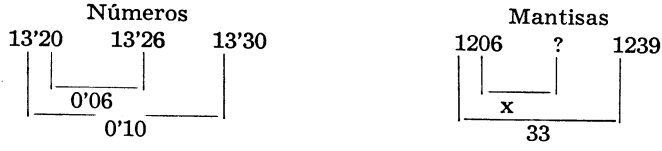
cuatro decimales, cinco decimales, etcétera, según el número de cifras que tenga la mantisa. Las tablas que acompañan al programa de este libro son de cuatro decimales. En ellas, las dos primeras cifras del número están en la izquierda de la página en la columna N; la tercera cifra, en la primera y última línea horizontal, y la mantisa se halla en el cruce de la fila encabezada con las dos primeras cifras del número y de la columna encabezada con la tercera cifra. Así, para hallar la mantisa del logaritmo de 132, se sigue la fila que tiene 13 en la columna N hasta llegar a la columna que empieza y termina por 2. En esta posición se halla la mantisa 1206, y como la característica es 2, resulta:

$$\log 132 = 2'1206.$$

Para hallar en estas tablas el logaritmo de un número de cuatro cifras, se usa el proceso llamado de *interpolación,* como se indica en el siguiente

Ejemplo. — *Hallar log* 13'26.

Solución: Se hallan las mantisas de los números inmediato anterior y siguiente a 13'26.



Admitiendo que la variación en la mantisa es proporcional a la variación en el número, tenemos:

$$\frac{x}{33} = \frac{0'06}{0'10} = 0'6;$$

de donde:

$$x = 0'6 \cdot 33 = 19'8.$$

Cuando se interpola en una tabla de cuatro decimales, sólo debemos conservar cuatro cifras en la mantisa. Por eso añadimos 20, y no 19'8.

Mantisa pedida = 1206 + 20 = 1226.

Luego:

$$\log 13'26 = \mathbf{1'1226.}$$

En las tablas que acompañan a este libro, el aumento de la mantisa, debido a la cuarta cifra del número, viene dado a la derecha de cada página, en la misma fila que las dos primeras cifras del número y en la columna encabezada por la cuarta cifra del número. Por eso no es necesario calcular dicho aumento; basta leerlo. Unicamente si el número tuviera más de cuatro acudiremos al método de interpolación.

Ejemplo 1. — *Hallar* log 29'17.

Solución:

$$\begin{aligned} &\text{mantisa de log } 291 = 4639 \\ &\text{incremento para } 0'7 = \ 10 \\ &\text{mantisa de log } 29'17 = 4649. \end{aligned}$$

Ya que la característica es 1, tendremos:

$$\log 29'17 = \mathbf{1'4649.}$$

Ejemplo 2. — *Hallar* log 9154'3.

Solución:

$$\log 9154'3 = 3'9614 + 0'0002 = \mathbf{3'9616.}$$

La interpolación es:

$$\frac{4'3}{10} = \frac{x}{5}; \quad x = 2'15 \sim 2.$$

Ejemplo 3. — *Hallar* log 0'091147.

Solución:

$$\log 0'091147 = 2'9595 + 0'0002 = \mathbf{2'9597.}$$

La interpolación es:

$$\frac{0'000047}{0'000100} = \frac{x}{5}; \quad x = 2'35 \sim 2.$$

75. Antilogaritmos. — Se llama *antilogaritmo* al número que corresponde a un logaritmo dado.

Supongamos que deseamos hallar el número cuyo logaritmo es 2'9053. Podemos buscar la mantisa en la tabla de logaritmos, y siguiendo un proceso inverso al expuesto para hallar éstos, tenemos el número correspondiente. En este caso corresponde al número 80, en la columna 4, y como la característica es 2, ha de tener 3 cifras enteras; o sea, el número pedido es 804. Si la mantisa dada no se encontrara en las tablas, se interpola de modo análogo al del párrafo anterior.

Ejemplo 1. — *Hallar* antilog 2'4186.

Solución:

$$\text{antilog } 2'4183 = 262.$$

Interpolación:

$$\frac{4186 - 4183}{4200 - 4183} = \frac{x}{1}; \quad x = \frac{3}{17} = 0'17$$

$$\text{antilog } 2'4186 = 262'17.$$

Ejemplo 2. — *Hallar* antilog 1'0925.
Solución:

$$\text{antilog } 1'0899 = 12'3.$$

Interpolación:

$$\frac{925 - 899}{934 - 899} = \frac{x}{0'1}; \quad x = \frac{2'6}{35} = 0'074$$

$$\text{antilog } 1'0905 = 12'374.$$

En las tablas que acompañan al programa se abrevia esta operación mediante unas tablillas laterales, que permiten obtener una cifra decimal más.

Ejemplo 3. — *Hallar* antilog $\overline{2}'1837$.
Solución:

$$\text{antilog } \overline{2}'1818 = 0'0152.$$

Diferencia: $1837 - 1818 = 19$.
En esa línea no tiene igual el 19, pero el más próximo es el 20, al que corresponde arriba un 7. Luego:

$$\text{antilog } \overline{2}'1837 = 0'01527.$$

EJERCICIOS

Mediante la definición de logaritmos, resolver los ejercicios siguientes:

1. $2^x = 16$, $x =$
2. $2^x = 32$, $x =$
3. $\log_2 64 =$
4. $\log_3 81 =$
5. ¿Cuál es el logaritmo de 9 en la base 3?
6. $\log_4 2 =$
7. $x^4 = 16$, $x =$
8. $4^x = 2$, $x =$
9. $27^x = 3$, $x =$
10. ¿Puede ser 0, 1 ó un número negativo la base de un sistema? Puede ser $(-3)^x = 27$.
11. Expresar $\log_2 8 = 3$ en la forma exponencial.
12. Expresar $4^3 = 64$ en la forma logarítmica.
13. Sabiendo que $\log 2 = 0'30103$, hallar los logaritmos de los siguientes números: 256, 1024, 512, 64, 4096.
14. Hallar $\log_3 81$ y $\log_3 \frac{1}{81}$.
15. $3^{1/x} = 9$, $x =$
16. ¿Cuál es el $\log_{101} 10201$.
17. ¿Cuál es el número si la base es 16 y su logaritmo es 0'5?

Hallar los logaritmos de los siguientes números:

18. 0'000001
19. 1000000
20. $\frac{1}{1000}$
21. 100000
22. $\frac{1}{100}$
23. $\frac{1}{10000}$
24. 10000
25. $\frac{1}{10}$
26. $\frac{1}{100000}$

Hallar los logaritmos siguientes:

27. $\log_2 16$.
28. $\log_6 216$.
29. $\log_5 25$.
30. $\log_5 625$.
31. $\log_3 729$.
32. $\log_4 64$.
33. $\log_8 512$.
34. $\log_3 81$.

Hallar el valor de las siguientes sumas:

35. $\log 1 + \log 10 + \log 1000 + \log 0'1 + \log 0'001$.
36. $\log 10000 - \log 1000 + \log 100000 - \log 100$.

Simplificar las siguientes expresiones:

37. $\log_2 4 + \log_3 81 + \log_4 64 - \log_6 216$.
38. $\log_2 64 + \log_2 1 - \log_3 9 + \log_{11} 121$.
39. $\log_3 81 - \log_2 1024 + \log_4 4096$.
40. $\log_4 256 + \log_5 625 - \log_3 243$.

Hallar los logaritmos de los números siguientes:

41. 5437.
42. 10'07.
43. 0'4657.
44. 300'9.
45. 4'684.
46. 0'009897.
47. 9999.
48. 8'6247.
49. 0'3127.
50. 11090.
51. 230'6.
52. 0'46047.
53. 24687.
54. 126'74.
55. 0'86047.
56. Trazar la gráfica de la función $y = \log_2 x$.

Hallar los números que corresponden a los siguientes logaritmos:

57. 1'8132.
58. 0'5587.
59. 6'7862.
60. 3'2119.
61. 0'0324.
62. 4'2509.
63. 2'5497.
64. 0'0006.
65. 1'5151.
66. 1'8344.
67. 0'8006.
68. 2'9547.
69. 3'8979.
70. 0'8632.
71. 4'4687.

72. El logaritmo de 8 en cierta base es 0'75. Calcular dicha base.
73. ¿En qué sistemas de logaritmos sería — 3 el logaritmo de 0'125?
74. ¿En qué base los logaritmos de 256 son, respectivamente, 8, 4, 2, 1 y $\frac{1}{2}$?

10

Logaritmos de los resultados operativos

76. **Logaritmo de un producto.** — *El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de sus factores.*

Supongamos que:

$$\log_b M = x, \quad \log_b N = y.$$

Luego:

$$M = b^x \quad N = b^y$$

igualdades que, multiplicadas, dan:

$$M\,N = b^x\,b^y = b^{x+y}.$$

De donde, por definición:

$$\log_b M\,N = x + y$$

o sea:

$$\log_b M\,N = \log_b M + \log_b N.$$

Ejemplo:

$$\log 26 \,.\, 84 = \log 26 + \log 84.$$

77. **Logaritmo de un cociente.** — *El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.*

Usando la misma notación que anteriormente, tenemos:

$$\frac{M}{N} = \frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$$

$$\log_b \frac{M}{N} = x - y$$

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N.$$

Ejemplo:

$$\log \frac{214}{386} = \log 214 - \log 386.$$

78. **Logaritmo de una potencia.** — *El logaritmo de la potencia de un número es igual al producto del exponente multiplicado por el logaritmo de la base.*

Si $\log_b N = x$, será:

$$N = b^x$$
$$N^m = (b^x)^m = b^{mx}$$
$$\log_b N^m = m\,x$$
$$\mathbf{\log_b N^m = m \log_b N.}$$

Ejemplo. — Log $(4'53)^3 = 3 \log 4'53$.

79. **Logaritmo de una raíz.** — *El logaritmo de la raíz* n*-sima de un número* M *es igual al logaritmo de* M *dividido por el índice* n *de la raíz.*

Si $\log_b M = x$, será:

$$M = b^x$$

y

$$\sqrt[n]{M} = \sqrt[n]{b^x} = b^{\frac{x}{n}}$$

luego:

$$\log_b \sqrt[n]{M} = \frac{x}{n}$$

es decir:

$$\mathbf{\log_b \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_b M.}$$

Ejemplo:

$$\log \sqrt[5]{3} = \frac{1}{5} \log 3.$$

Frecuentemente se presentan juntas algunas de estas propiedades.

Ejemplo 1.°:

$$\log \frac{28'6\ (5'43)^3}{485\ \sqrt{17'6}} = \log 28'6 + 3 \log 5'43 - \log 485 - \frac{1}{2} \log 17'6.$$

Ejemplo 2.°:

$$\log \frac{4}{3} \pi r^3 = \log 4 + \log \pi + 3 \log r - \log 3.$$

Ejemplo 3.°:

$$\log \frac{A^2 \sqrt[3]{C}}{B^3} = 2 \log A - 3 \log B + 1/3 \log C.$$

80. **Cologaritmo.** — Se llama *cologaritmo* de un número N al logaritmo de su recíproco, $\frac{1}{N}$. Se escribe "colog N". Así que, por definición:

$$\text{colog } N = \log \frac{1}{N} = \log 1 - \log N = -\log N.$$

Es decir, *el cologaritmo de un número N es igual al logaritmo del mismo número cambiado de signo.* Pero ha de tenerse presente que, según el convenio adoptado, la mantisa del cologaritmo ha de ser positiva. Para su cálculo procederemos como indica el siguiente:

Ejemplo 1. — *Hallar el cologaritmo de* 6713.
Solución:

$$\text{colog } 6713 = -\log 6713$$

o sea:

$$\text{colog } 6713 = -3'8269 = -3 - 1 + 1 - 0'8269 = \bar{4}'1731.$$

Por tanto: *para hallar el cologaritmo de un número se suma una unidad positiva a la característica del logaritmo y luego se le cambia de signo; las cifras decimales se restan de* 9, *excepto la primera cifra significativa de la derecha, que se resta de* 10.

Ejemplo 2. — Log 30'1 = 1'4786.

$$\text{colog } 30'1 = \bar{2}'5214.$$

Ejemplo 3. — Log 0'0375 = $\bar{2}$'5740.

$$\text{colog } 0'0375 = 1'4260.$$

81. **Uso del cologaritmo.** — Como dividir por un número es lo mismo que multiplicar por su inverso, por ejemplo:

$$\frac{4325}{6713} = 4325 \cdot \frac{1}{6713} \qquad (1)$$

resulta:

$$\log \frac{4325}{6713} = \log 4325 + \text{colog } 6713.$$

Luego, en vez de restar el logaritmo del divisor, podemos sumar su cologaritmo.

La igualdad (1) nos muestra que el cálculo de un cociente se reduce al de una suma.

Ejemplo. — *Hallar* $\frac{4325}{6713}$.

Solución:

$$\begin{aligned} \log 4325 &= 3'6360 \\ \operatorname{colog} 6713 &= \overline{4}'1731 \qquad \text{(Núm. 77. Ejemplo 1.°)} \\ \therefore \log \text{ del cociente} &= \overline{1}'8091 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ cociente} = \text{antilog } \overline{1}'8091 = \mathbf{0'6443.}$$

82. **Cálculo logarítmico.** — Los logaritmos permiten calcular las multiplicaciones y divisiones mediante adiciones y sustracciones, y las potencias y raíces, mediante multiplicaciones y divisiones, que son operaciones más cortas y sencillas.

Ejemplo 1. — *Hallar el valor de* $x = 36'2 \cdot 867$.

Solución:

$$\log x = \log 36'2 + \log 867$$

$$\begin{aligned} \log 36'2 &= 1'5587 \\ \log\ 867 &= 2'9380 \\ \log x &= 4'4967 \\ \therefore\ x &= \text{antilog } 4'4967 = \mathbf{31390.} \end{aligned}$$

Ejemplo 2. — *Hallar el valor de* $x = 36'2 : 867$.

Solución:

$$\log x = \log 36'2 + \operatorname{colog} 867$$

$$\begin{aligned} \log 36'2 &= 1'5587 \\ \operatorname{colog}\ 867 &= \overline{3}'0620 \\ \log x &= \overline{2}'6207 \\ \therefore\ x &= \mathbf{0'04176.} \end{aligned}$$

Ejemplo 3. — *Hallar el valor de* $x = (0'362)^4$.

Solución:

$$\log x = 4 \cdot \log 0'362$$

$$\begin{aligned} \log 0'362 &= \overline{1}'5587 \\ &\times 4 \\ \log x &= \overline{2}'2348 \\ \therefore\ x &= \mathbf{0'01717.} \end{aligned}$$

En este ejemplo hemos visto que para multiplicar por 4 el logaritmo $\bar{1}'5587$ hemos considerado a éste como una suma de la característica negativa y la mantisa positiva.

Ejemplo 4. — *Hallar el valor de* $x = (0'362)^{-4}$.

Solución: En problemas de este tipo a veces es conveniente usar la mantisa negativa; así:

$$\log 0'362 = \bar{1}'5587 = \bar{1} + 0'5587 = -0'4413$$

$$\times -4$$

$$\log x = 1'7652$$

$$\therefore \; x = \mathbf{58'24.}$$

Ejemplo 5. — *Hallar el valor de* $x = \sqrt[3]{36'2}$.

Solución:

$$\log x = \frac{1}{3} \log 36'2$$

$$\log 36'2 = 1'5587$$

$$\log x = \frac{1'5587}{3} = 0'5196$$

$$\therefore \; x = \mathbf{3'308.}$$

Ejemplo 6. — *Hallar el valor de* $x = \sqrt[3]{0'362}$.

Solución:

$$\log x = \frac{\log 0'362}{3}$$

$$\log 0'362 = \bar{1}'5587.$$

Con el fin de hacer divisible por 3 la característica negativa, se añade y resta 2:

$$\log 0'362 = \bar{3}'5587 + 2 = -3 + 2'5587$$

$$\text{Log } x = \frac{-3 + 2'5587}{3} = -1 + 0'8529 = \bar{1}'8529$$

$$\therefore \; x = \mathbf{0'7127.}$$

Según se ha visto, cuando la característica es negativa, se descompone el logaritmo en dos sumandos: característica y mantisa, que se dividen separadamente. Y si aquélla no fuera divisible exactamente, se le resta el número suficiente para hacerla divisible, añadiendo igual número de unidades positivas a la mantisa.

EJERCICIOS

Hallar el valor de las siguientes expresiones por medio de logaritmos.

1. $125 \cdot 37$.
2. $38 : 523$.
3. $123'4 \cdot 9'866$.
4. $0'8237 \cdot 0'001986$.
5. $1'333 : 2'124$.
6. $1'732 : 0'7325$.
7. $0'6842 : 0'01492$.
8. $48'25 \cdot 9'638 \cdot 0'9638$.
9. $\dfrac{9'812 \cdot 1876}{405'1}$.
10. $2\pi \cdot 5'675$.
11. $(2'71)^{3/4}$.
12. $(0'8696)^3$.
13. $\sqrt{14'86}$.
14. $\sqrt{11'23}$.
15. $\sqrt{0'3564}$.
16. $\sqrt{1'975 \cdot 23'18}$.
17. $\sqrt[3]{5'432 : 0'8221}$.
18. $\dfrac{66'07 \cdot 0'3842}{9'813 \cdot 14'45}$.
19. $(1'006)^{-1/2}$.
20. $(0'07625)^{-1/3}$.
21. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{3/4}$.
22. $\dfrac{\sqrt[3]{25'32}}{\sqrt{1'004}}$.
23. $\sqrt[3]{-9999}$.
24. $\left(\dfrac{8'92 \cdot 4'831}{368'7 \cdot 59'62}\right)^{2/3}$.
25. $\log 42'96 \cdot \log 0'8444$.
26. $\sqrt{\left(\dfrac{0'06 \cdot 0'00875}{34'73 \cdot 0'358}\right)^3}$.
27. $\dfrac{\log 24'86}{\log 12'43}$.
28. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^4$.

29. Dados $\log 2 = 0'301030$ y $\log 3 = 0'477121$, hallar $\log 5$, $\log 12$, $\log {}^{5}/_{12}$ y $\log \sqrt[3]{12/5}$.

30. Hallar el logaritmo decimal de 648, sabiendo que el $\log 3 = 0'477121$ y $\log 5 = 0'698970$.

31. Conociendo $\log 2 = 0'301030$ y $\log 3 = 0'477121$, calcular $\log 0'375$.

32. Sabiendo que $\log 2 = 0'301030$ y $\log 3 = 0'477121$, hallar $\log \sqrt[3]{0'405}$.

33. Sabiendo que $\log 2 = 0'301030$, calcular $\log 250$, $\log \dfrac{1}{\sqrt[3]{16}}$ y $\log \sqrt[4]{0'08}$.

34. Se sabe que $\log 2 = 0'301030$ y $\log 3 = 0'477121$, calcular: $\log 5$, $\log 0'18$ y $\log \sqrt{12}$.

35. Se sabe que $\log a = 3'993350$ y $\log b = 3'511212$. Hallar el $\log E$ siendo $E = \sqrt[3]{a\,b^2}$.

36. Desarrollar la siguiente fórmula.

$$x = \sqrt[6]{\frac{a^4 b^5 c}{m^2 n}}$$

aplicando logaritmos.

11

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

83. Ecuaciones exponenciales. — Se llaman *ecuaciones exponenciales* aquellas en que la incógnita figura como exponente. Pueden resolverse por observación, pero de ordinario se resuelven tomando logaritmos en los dos miembros de la ecuación.

Ejemplo 1. — *Resolver la ecuación:*

$$2^x = 64 \tag{1}$$

Solución por observación:

$$2^x = 64$$
$$2^x = 2^6$$
$$x = 6.$$

Solución por logaritmos:
Tomando logaritmos en ambos miembros, tenemos:

$$\log 2^x = \log 64$$
$$x \log 2 = \log 64$$

$$x = \frac{\log 64}{\log 2} = \frac{1'8062}{0'3010} = 6.$$

Ejemplo 2. — *Resolver la ecuación:*

$$3^x \cdot 2^{3x-1} = 6^{2x+1} \tag{2}$$

Solución: Tomando logaritmos en los dos miembros:

$$x \log 3 + (3x - 1) \log 2 = (2x + 1) \log 6$$
$$x (\log 3 + 3 \log 2 - 2 \log 6) = \log 6 + \log 2$$

$$x \log \frac{3 \cdot 2^3}{6^2} = \log 12$$

$$x = \frac{\log 12}{\log 2/3} = \frac{\log 12}{-\log 1'5} = \frac{1'0792}{-0'1761} = -6'128.$$

Ejemplo 3. — *Resolver el sistema:*

$$\begin{cases} \dfrac{b^{2x-3}}{b^{3y+2}} = b^8 \\ 3x - 2y = 17. \end{cases} \tag{3}$$

Solución: Tomando logaritmos en los dos miembros de la primera ecuación (3), se tiene:

$$(2x - 3)\log b - (3y + 2)\log b = 8 \log b.$$

De donde:

$$2x - 3 - 3y - 2 = 8$$

o sea:

$$2x - 3y = 13.$$

Luego el sistema (3) se reduce a:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 13; \\ 3x - 2y = 17; \end{cases}$$

que resuelto da $\mathbf{x = 5,\ y = -1.}$

Ejemplo 4. — *Resolver la ecuación:*

$$10^x - 10^{-x} = 2.$$

Solución: Multiplicando por 10^x, tenemos:

$$10^{2x} - 1 = 2 \cdot 10^x$$

o sea:

$$10^{2x} - 2 \cdot 10^x - 1 = 0.$$

Tomando como incógnita 10^x, resulta la ecuación cuadrática:

$$(10^x)^2 - 2 \cdot 10^x - 1 = 0$$

y llamando y a 10^x:

$$y^2 - 2y - 1 = 0$$

que, resuelta por el procedimiento ordinario, da:

$$y = 10^x = 1 \pm \sqrt{2}.$$

La raíz $10^x = 1 - \sqrt{2}$ es inadmisible, ya que 10^x es necesariamente positivo. Luego:

$$x = \log (1 + \sqrt{2}) = \log 2'414 = \mathbf{0'3827.}$$

Ejemplo 5. — *Resolver la ecuación:*

$$4x^2 - 6x = 16384.$$

Solución: Tomando logaritmos en ambos miembros:

$$(x^2 - 6x)\log 4 = \log 16384;$$

$$x^2 - 6x = \frac{\log 16384}{\log 4} = 7.$$

por tanto, resulta la ecuación:

$$x^2 - 6x - 7 = 0$$

cuyas raíces son: $\mathbf{x = 7}$ y $\mathbf{x = -1.}$

Ejemplo 6. — *Resolver la ecuación:*

$$2^{x+3} + 4^{x+1} = 320.$$

Solución: Dicha ecuación equivale a ésta:

$$2^3 \cdot 2^x + 4 \cdot 4^x = 320$$

o sea:

$$8 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^{2x} = 320;$$

y haciendo $y = 2^x$, queda:

$$8y + 4y^2 = 320; \quad y^2 + 2y - 80 = 0,$$

ecuación cuyas raíces son $y = 8$ e $y = -10$.

Luego:

$$2^x = 8; \quad x = \frac{\log 8}{\log 2} = 3.$$

La solución $2^x = -10$ es inadmisible, por ser necesariamente 2^x positivo.

84. Ecuaciones logarítmicas. — *Son aquellas en que la incógnita aparece bajo la operación del logaritmo.*

Se resuelven, de ordinario, tomando antilogaritmos en los dos miembros de la ecuación. Tomar antilogaritmos significa pasar de los logaritmos a los números.

Ejemplo 1. — *Sea la ecuación:*

$$\log (2x + 7) - \log (x - 1) = \log 5.$$

Solución: Por ser la diferencia de logaritmos igual al logaritmo de un cociente resulta:

$$\log \frac{2x + 7}{x - 1} = \log 5.$$

Tomando antilogaritmos:

$$\frac{2x + 7}{x - 1} = 5$$

ecuación que, resuelta, da:

$$x = 4.$$

Ejemplo 2. — *Resolver la ecuación:*

$$\frac{\log (35 - x^3)}{\log (5 - x)} = 3.$$

Solución: Quitando denominadores:

$$\log (35 - x^3) = 3 \log (5 - x) = \log (5 - x)^3.$$

Tomando antilogaritmos y desarrollando:

$$35 - x^3 = (5 - x)^3 = 125 - 75x + 15x^2 - x^3.$$

Reducimos términos semejantes y ordenamos:

$$15\,x^2 - 75\,x + 90 = 0; \quad x^2 - 5\,x + 6 = 0.$$

Esta ecuación tiene por raíces $x = 2$ y $x = 3$.

Ejemplo 3. — *Resolver el sistema:*

$$\begin{aligned} 3\,x + 5\,y &= 35 \\ \log x - \log y &= 1 \end{aligned} \qquad (1)$$

Solución: Tomando antilogaritmos en la segunda ecuación, se obtiene:

$$\frac{x}{y} = 10; \quad x = 10\,y,$$

valor que, sustituído en la primera ecuación, da:

$$30\,y + 5\,y = 35; \quad y = 1.$$

Luego:

$$x = 10.$$

EJERCICIOS

1. Resolver $\dfrac{2 \cdot 3^x - 5}{11} + \dfrac{3^{x+1} - 4}{5} = 3^x - 5.$

2. Sin utilizar tablas de logaritmos, resolver la ecuación

$$(\sqrt{2})^{x\sqrt{3}} = 2^{x+1}.$$

3. Encontrar un número natural x tal que el duplo de su logaritmo decimal exceda en una unidad al logaritmo del número $x + \dfrac{11}{10}$.

4. Hallar dos números cuya suma es 17, y la suma de sus logaritmos es 1'8573.

5. Resolver la ecuación exponencial:

$$3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}.$$

6. Resolver la ecuación $4^{3x} = 8^x + 3$.

7. Dedúzcase que la solución de la ecuación:

$$12^{x^2-4x+5} = 120 \text{ es } 2 \pm \sqrt{\frac{1}{\log 12}}$$

y exprésese el resultado en forma decimal.

8. Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} \log_x (y - 18) &= 2 \\ \log_y (x + 3) &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

9. Resolver el sistema:

$$\log x = \log (5\,y) + \log 14 - \log 7$$
$$x^2 = 20\,y^2 + 15\,x + 20.$$

10. Resolver: $2^{1-x^2} = 1/8$.
11. Resolver la ecuación: $5^x - 97 \cdot \sqrt{5^x} + 6^4 = 0$.

Resolver las siguientes ecuaciones y sistemas:

12. $10^x = 5^{2x-3}$.
13. $5^x \cdot 3^{2x+1} = 8$.
14. $2^{x+1} \cdot 3^{3x+2} = 4^{4x+3}$.
15. $(1'025)^x = 1'160$.
16. $2^x \cdot 6^{x+2} = 5^{2x} \cdot 7^{1-x}$.
17. $6^{\frac{x}{10}} = \dfrac{5}{2}$.
18. $\dfrac{(1'02)^{x-1}}{0'02} = 5'204$.
19. $2^x\,3^y = 25$.
    $3^x\,5^y = 35$.
20. $3^{x^2}\,2^{3y+1} = 8$.
    $2^{x^3}\,2^{2y-3} = 5$.
21. $3^{2x+y+1}\,2^y = 7$.
    $2^{3x-y}\,5^{x+2y} = 4$.
22. $a^{x+y} = a^4$.
    $a^{x-y} = a^2$.
23. $4^x + 6 \cdot 4^{-x} = 5$.
24. $4^x - 2^{x+3} + 12 = 0$.
25. $4^{2x} - 8 \cdot 4^x + 12 = 0$.
26. $x^y = y^x$.
    $29\,x = 18\,y$.
27. $3^x - 3^{1-x} = 2$.
28. $6\,(^{3x-2})^2 = 1296$.
29. $27^{x^2-6} = 19683$.
30. $\sqrt[x]{8^x} = 65536$.
31. $7^{\sqrt{x}} = 16807$.
32. $3^{4x-3} = 19683$.
33. $5^{x^2+4x} = 3125$.
34. $2^{3x} = 512$.
35. $6^x + 6^{3-x} = 42$.
36. $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 3 = 0$.
37. $3^x + 3^{6-x} = 90$.
38. $9^{x-5} = 6561$.
39. $2 \log 2\,x - \log x = 1$.
40. $2 \log (2\,x - 2) = 1$.
41. $\log 3\,x = \log 6 + 2 \log x$.
42. $\dfrac{\log (16 - x^2)}{\log (3\,x - 4)} = 2$.
43. $x + y = 22$.
    $\log x - \log y = 1$.
44. $\log x + 3 \log y = 5$.
    $\log \dfrac{x^2}{y} = 3$.
45. $3\,x + 5\,y = 35$.
    $\log x + \log y = 1$.
46. $\sqrt{x} - \sqrt{y} = 1$.
    $\log x + \log y = 2 + 2 \log 2$.
47. $x^2 - y^2 = 396$.
    $\log x - \log y = 1$.
48. $\log x + \log y = 4$.
    $\log x - \log y = 2$.
49. $3 \log x - 2 \log y = 2$.
    $x^3 + y^2 = 1$.
50. $\log x^2 + \log y = 2$.
    $\log x - \log y^2 = 6$.
51. $3^x \cdot 2^x = 2^2 \cdot 54$.
52. $2^{3x} = 8^{-x+3}$.
53. $\sqrt[4]{a^x} = a^3\,\sqrt[5]{a^x}$.
54. $\sqrt[3]{a^{x+10}} = a^3$.
55. $10^{5-x} = 100$.
56. $4^{3x-1} = (0'5)^{x-3}$.
57. $8^x = 128$.
58. $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^x = (1'5)^5$.
59. $2^x + 4^x - 272 = 0$.
60. $4^{x+1} + 64 \cdot 4^{-x} = 257$.
61. $2\,e^x - e^{-x} - 1 = 0$.
62. $2^{x+y} = 128$.
    $\log x + \log y = 1$.

12

Progresiones aritméticas

85. **Definiciones.** — *Progresión aritmética es una sucesión de números tales que cada uno se obtiene del anterior sumándole una constante llamada diferencia o (impropiamente) razón de la progresión.*

Son progresiones aritméticas las siguientes:

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots,$$

cuya razón es 2;

$$-\frac{1}{2},\ -1,\ -\frac{3}{2},\ -2,\ -\frac{5}{2},\ \ldots,$$

cuya razón es $-\frac{1}{2}$.

Un capital colocado a interés simple a un tanto por ciento dado, crece una cantidad constante cada año. La velocidad de un cuerpo que cae libremente crece 9'8 m. en cada segundo. Por lo tanto, el capital a interés simple y la velocidad del cuerpo que cae son ejemplos de progresiones aritméticas.

Si la razón es positiva, la progresión es *creciente,* porque cada término es mayor que el anterior, como en el ejemplo 1, y si la razón es negativa, la progresión es *decreciente,* como en el ejemplo 2.

Término de una progresión es cada uno de los números de la progresión, como en el ejemplo 1 los números 1, 3, 5, 7, ...

Las progresiones pueden ser *limitadas* o *ilimitadas,* según que tengan último término o no lo tengan.

En las progresiones limitadas, los términos primero y último se llaman *extremos,* y los demás, *medios.*

86. **Cálculo del término enésimo.** — Si designamos por a_1 al primer término, por d la diferencia constante, por n el número de términos y por a_2, a_3, a_4, ..., a_n los términos 2.°, 3.°, 4.°, ..., enésimo, se tiene por definición de progresión aritmética:

$$\begin{aligned}
a_2 &= a_1 + d \\
a_3 &= a_2 + d \\
a_4 &= a_3 + d \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n-1} &= a_{n-2} + d \\
a_n &= a_{n-1} + d
\end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro las (n — 1) igualdades anteriores:

$$a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + (n - 1)\, d$$

y simplificando:

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1)\, d} \qquad (1)$$

El término enésimo de una progresión aritmética es igual al primero más (n — 1) *veces la razón.*

Y como siempre podemos suponer que la progresión empieza en cualquier término, resulta, en general:

Un término cualquiera de una progresión aritmética es igual a otro anterior, más la razón multiplicada por el número que indica la diferencia de lugares entre ambos.

La fórmula (1) permite hallar cualquiera de los cuatro números a_n, a_1, n, d, si conocemos los valores de los otros tres.

Ejemplo 1. — *En la progresión* 5, 9, 13, 17, ..., *¿qué término vale* 65?

Solución: En este caso es:

$$a_1 = 5,\ d = 4,\ a_n = 65.$$

Sustituyendo en la fórmula (1) se obtiene:

$$65 = 5 + (n - 1)\, 4.$$

Resolviendo:

$$n = 16.$$

Luego 65 es el **décimosexto término** *de la progresión.*

Ejemplo 2. — *El cuarto y décimoquinto términos de una progresión aritmética son, respectivamente,* 9 *y* 31. *Escribir los seis primeros términos.*

Solución: Debemos hallar el primer término *a* y la razón *d*. Ya que el cuarto término es a + 3 d, y el décimoquinto término es a + 14 d, tenemos el sistema:

$$\begin{aligned} a + 3d &= 9; \\ a + 14d &= 31. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema, sale.

$$a = 3 \quad \text{y} \quad d = 2.$$

Luego la progresión es:

$$3, 5, 7, 9, 11, 13, \ldots$$

87. **Interpolación.** — En una progresión aritmética todos los términos comprendidos entre dos cualesquiera se llaman *medios aritméticos o diferenciales de estos dos.*

Interpolar *n medios diferenciales entre dos números dados,* a_1 *y* a_n, *es formar una progresión aritmética de* n + 2 *términos, cuyos extremos sean* a_1 *y* a_n.

Los *n* medios diferenciales interpolados con los 2 extremos forman una progresión de n + 2 términos.

Hallando la razón mediante la ecuación (1) del número 83 queda resuelto el problema:

$$a_n = a_1 + (n + 2 - 1)\, d$$

de donde:

$$\mathbf{d = \frac{a_n - a_1}{n + 1}} \qquad (2)$$

Ejemplo. — *Interpolar* 5 *medios diferenciales entre* -6 y 24.
Solución: Aquí:

$$a_1 = -6,\ n = 5,\ a_n = 24.$$

Luego, sustituyendo en la fórmula (2), resulta:

$$d = \frac{24 + 6}{6} = 5.$$

Los medios pedidos son:

$$\mathbf{-1,\ 4,\ 9,\ 14,\ 19.}$$

88. Suma de los términos de una progresión aritmética. — Llamando s a la suma de n términos consecutivos, se tiene:

$$s = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2\,d) + \ldots + (a_n - 2\,d) + (a_n - d) + a_n$$

Análogamente, en virtud de la propiedad conmutativa de la suma:

$$s = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2\,d) + \ldots + (a_1 + 2\,d) + (a_1 + d) + a_1$$

Sumando término a término resulta:

$$2\,s = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots\ldots + (a_1 + a_n)$$

o sea:

$$2\,s = n\,(a_1 + a_n)$$

$$\mathbf{s = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.}$$

La suma de n *términos consecutivos de una progresión aritmética es igual a la semisuma de los extremos multiplicada por el número de términos.*

Ejemplo 1. — *En una progresión aritmética es:* $a_1 = -3$, $d = 5$, $a_n = 27$, *hallar el número de términos y la suma de la progresión.*
Solución: Sustituyendo en las fórmulas (1) y (3), tenemos:

$$27 = -3 + (n - 1)\,5$$

y

$$s = \frac{27 - 3}{2}\, n.$$

De la primera se obtiene:

$$\mathbf{n = 7}$$

valor que, sustituído en la segunda, da:

$$s = \frac{24}{2} \cdot 7 = \mathbf{84}.$$

Ejemplo 2. — Dados $a_n = 23$, $d = 2$, $s = 143$, *hallar* a_1 *y* n.

Solución: Sustituyendo a_n, d y s por sus valores, tenemos:

$$23 = a_1 + (n - 1)\,2$$

y

$$143 = \frac{n}{2}(a_1 + 23).$$

Despejando a_1 en la primera ecuación y sustituyendo su valor en la segunda, resulta una ecuación de segundo grado:

$$2n^2 - 48n + 286 = 0$$

$$n = 11 \text{ y } 13.$$

Calculado también a_1, resulta:

$$a_1 = 3 \quad \text{y} - 1.$$

Evidentemente, hay dos progresiones:

3, 5, 7, 9 ... — 1, 1, 3, 5 ...

Por los ejemplos anteriores se ve que, si se conocen tres de los cinco números: a_1, d, n, a_n, s, de una progresión aritmética, se pueden hallar los valores de los otros dos por medio de las ecuaciones (1) y (3).

EJERCICIOS

1. Hallar los términos que se indican en las siguientes progresiones aritméticas:

a) El trigésimo en 1, 6, 11, 16, ...
b) El décimosexto en 1, 5, 9, 13, ...
c) El vigésimocuarto en — 8, — 5, — 2, 1, ...
d) El vigésimo en 12, 6, 0, — 6, ...
e) El décimoctavo en $-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$

2. En una progresión aritmética cuyo primer término es 7, el vigésimosegundo es 175. Hallar la razón.

3. En una progresión aritmética cuyo primer término es 12, el trigésimo es 99. Hallar el décimosexto.

4. Se lanza un proyectil verticalmente hacia arriba con velocidad inicial de 137'2 m/seg. Al cabo de 1 segundo su velocidad es 127'4 m/seg. y al cabo de 2 segundos su velocidad es 117'6 m/seg., etcétera. ¿En cuántos segundos alcanzará la máxima altura?

5. Interpolar los medios diferenciales que se indican:

a) Cuatro entre 5 y 25.
b) Tres entre 12 y -2.
c) Cinco entre 3 y 27.
d) Seis entre -6 y 29.
e) Seis entre 1/2 y 10.
f) Dos entre 1/2 y 1/3.

6. Una distancia está dividida en 6 partes, que están en progresión aritmética. La más corta es de 2 cm. y la más larga de 56 cm. Hallar las longitudes de las otras partes.

7. Una serie de 8 pesos está en progresión aritmética. El menor es 1 g y el mayor 15 g. Hallar los otros pesos.

8. Hallar la suma de los términos de una progresión aritmética en los casos siguientes:

a) De 25 términos en la 3, 8, 13, ...
b) De 22 términos en la 42, 39, 36, ...
c) De 40 términos en la 1/2, 5/8, 3/4, ...
d) De los 100 primeros números naturales.
e) De los 100 primeros números pares.
f) De los 100 primeros números impares.
g) De todos los números impares de dos cifras.
h) De todos los números comprendidos entre 50 y 250 que sean divisibles por 4.

9. Hallar la suma de los n primeros números impares.

10. Hallar la suma de los n primeros números pares.

11. ¿Cuántos términos de la progresión 3, 1, -1, -3, -5, ..., se deben tomar para que la suma sea -140?

12. ¿Cuántos términos de la progresión $6\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, ..., se deben tomar para que la suma sea -396?

13. Si $a_1 = 4$, $d = 3$, $a_n = 40$, hallar n y s.

14. El primer término de una progresión aritmética es -8 y la suma de los 10 primeros es 100. Escribir los cinco primeros términos de la progresión.

15. Calcular la suma de los 100 primeros números pares que no sean múltiplos de 3.

16. Calcular las dimensiones de un ortoedro, sabiendo que están en progresión aritmética, que suman 78 m. y que el volumen del ortoedro es 15.640 metros cúbicos.

17. Los ángulos de un exágono forman una progresión aritmética, valiendo 80° el menor de ellos. Calcular el valor de los demás.

18. Sabiendo que la razón de una progresión aritmética es 3 y que la suma de los 25 primeros términos es 29 veces el último, calcular éste y el primero.

19. Hallar cuatro números en progresión aritmética, conociendo su suma, que es 22, y la suma de sus cuadrados, que es 166.

20. Suma de los múltiplos de 59 comprendidos entre 1000 y 2000.

21. Hallar tres números en progresión aritmética, tales que su suma sea 111 y que la suma de sus cuadrados sea 4.157.

22. En un tramo de carretera en el que existen dos árboles, cuya distancia es de 162 m. hay que plantar árboles a igual distancia entre ellos. Se desea que la separación difiera lo menos posible de ocho metros. ¿Cuántos árboles se intercalarán y qué distancia habrá del tercero al décimo?

23. La suma de tres números en progresión aritmética es 33 y su producto 1.287. Hallar estos números.

24. Las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo, forman una progresión aritmética de razón 3. Calcular los tres lados.

25. En una progresión aritmética de un número impar de términos, la suma de los de lugar impar es 75, y la suma de los de lugar par es 60. Calcular el término central y el número de términos.

26. Dada la sucesión $\frac{n^2-1}{n}$, n, $\frac{n^2+1}{n}$, $\frac{n^2+2}{n}$, en la que n es un número natural, encontrar el enésimo término y la suma de los n términos.

27. La suma de los términos de una progresión aritmética es 169, y su término central vale 13. Hallar el número de términos de la progresión.

28. En una progresión aritmética de un número impar de términos, ¿cuánto vale el término central en función de los extremos?

29. Si un reloj toca solamente las horas, ¿cuántas campanadas dará en un día?

30. Un hombre se compromete a hacer un pozo en las siguientes condiciones: por el primer metro recibirá 8 duros y por cada metro siguiente dos duros más. Si el pozo tiene 27 m. de profundidad, ¿cuánto recibirá?

31. Un obrero compra una casa por 6200 duros. Se compromete a pagar 600 duros al final del primer año, 650 duros al final del segundo año, etcétera. ¿Cuántos años necesitará para pagar la casa?

32. La suma de los ocho primeros términos de una progresión aritmética es 64 y la suma de los 18 primeros términos es 324. Hallar la progresión.

33. Un hombre consigue un empleo con un sueldo de 1800 duros al año. En los años sucesivos recibirá el sueldo aumentando en 50 duros cada año. ¿Cuánto ganará durante el año 15.°? ¿Y cuánto durante el vigésimo año?

34. Un muchacho se propone colocar 45 piedras en línea recta y que disten del sitio en que actualmente se encuentran reunidas 3 m., 6 m., 9 m. etc. ¿Cuál es la distancia que debe recorrer el muchacho para colocar las piedras, llevando una sola cada vez?

35. Un carro que baja por un plano inclinado recorre un metro en el primer segundo, 4 m. en el segundo, 7 m. en el tercer segundo, etc. ¿Cuánto recorre en 20 segundos? ¿Cuánto tiempo tardará en recorrer los 1335 m. que tiene de longitud el plano inclinado?

36. Un objeto que cae libremente en el espacio recorre 4'9 m. en el primer segundo, 14'7 m. en el siguiente, 24'5 m. en el siguiente, etc. ¿Cuánto caerá en 6 segundos? ¿En 10 segundos? ¿En 60 segundos?

37. La suma de tres términos de una progresión aritmética es 33. El cuadrado del último término excede a la suma de los cuadrados de los dos primeros en 11. ¿Cuáles son los números?

38. Un proyectil es lanzado verticalmente hacia arriba con velocidad de 539 m/seg. Cuando sube, su velocidad decrece, y cuando baja, su velocidad crece en 9'8 m/seg. ¿Qué altura alcanzará? ¿Cuánto tiempo tardará en volver al suelo?

39. Un conjunto de esferas forman una pirámide de base cuadrada con 12 esferas en cada lado. ¿Cuántas esferas hay en la capa del fondo? ¿En la segunda capa? ¿En la tercera? ¿En toda la pirámide?

40. Hallar los tres términos de una progresión aritmética, tales que su suma es 18 y la suma del primero y segundo igual al tercero disminuído en 2.

41. La suma de tres términos de una progresión aritmética es 15 y la suma de sus cuadrados es 107. Hallar los números.

13

Progresiones geométricas

89. **Definiciones.** — Progresión geométrica *es una sucesión de números tales que cada uno se obtiene del anterior multiplicándole por una constante llamada* razón *de la progresión.*

Son progresiones geométricas las siguientes:

$$1, 2, 4, 8, \ldots$$

cuya razón es 2;

$$a^2, a, 1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \ldots$$

cuya razón es $\frac{1}{a}$.

Si la razón es mayor que la unidad, la progresión geométrica es *creciente,* como en el ejemplo 1.°; si la razón es menor que la unidad, la progresión geométrica es *decreciente,* como en los ejemplos 2.° y 3.°, y si la razón es negativa, la progresión geométrica tiene sus términos *alternativamente* positivos y negativos.

90. **Cálculo del término enésimo.** — Si designamos por a_1 el primer término, por r la razón constante, por n el número de términos y por a_2, a_3, a_4, ... a_n los términos 2.°, 3.°, 4.°, ..., enésimo, se tendrá por definición de progresión geométrica:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 r \\ a_3 &= a_2 r \\ a_4 &= a_3 r \\ a_{n-1} &= a_{n-2} r \\ a_n &= a_{n-1} r \end{aligned}$$

Multiplicando miembro a miembro las $(n-1)$ igualdades anteriores:

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \ldots a_{n-1} \cdot a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_{n-2} \cdot a_{n-1} \cdot r^{n-1}$$

y simplificando:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \qquad (1)$$

El término enésimo de una progresión geométrica es igual al primero multiplicado por la razón elevada al exponente $(n-1)$.

Y como siempre podemos suponer que la progresión empieza en cualquier término, resulta, en general:

Un término cualquiera de una progresión geométrica es igual a otro anterior multiplicado por la razón elevada al número que indica la diferencia de lugares entre ambos.

La fórmula (1) permite hallar el valor de cualquiera de los cuatro números a_n, a_1, r, n, si conocemos los valores de los otros tres.

Ejemplo 1. — *El término décimo de una progresión geométrica es* $\frac{1}{512}$ *y el término primero es* 1. *Hallar la razón.*

Solución: Ahora es:

$$a_1 = 1,\ n = 10,\ a_n = \frac{1}{512}.$$

Sustituyendo estos valores en la fórmula (1), sale:

$$\frac{1}{512} = 1 \cdot r^9.$$

Luego:

$$r = \sqrt[9]{\frac{1}{512}} = \frac{1}{2}.$$

Ejemplo 2. — *El quinto y octavo términos de una progresión geométrica son* $\frac{16}{27}$ *y* $\frac{128}{729}$, *respectivamente. Escribir los ocho primeros términos.*

Solución: Ya que el quinto término es $a_1 r^4$ y el octavo es $a_1 r^7$, tenemos:

$$a_1 r^4 = \frac{16}{27} \tag{2}$$

$$a_1 r^7 = \frac{128}{729}.$$

Dividiendo ordenadamente estas dos igualdades:

$$r^3 = \frac{8}{27}.$$

Luego:

$$r = \frac{2}{3}.$$

Sustituyendo el valor de r en la fórmula (2), resulta:

$$\frac{16}{81}\,a_1 = \frac{16}{27}.$$

Luego:

$$a_1 = 3.$$

Por tanto, la progresión es:

$$3,\ 2,\ \frac{4}{3},\ \frac{8}{9},\ \frac{16}{27},\ \frac{32}{81},\ \frac{64}{243},\ \frac{128}{729},\ \ldots$$

Ejemplo 3. — *Se colocan* 10 *céntimos en el primer cuadro de un tablero de ajedrez, veinte céntimos en el segundo cuadro y así sucesivamente se dobla la cantidad cada vez. ¿En qué cuadro pasará de* 1000 *duros la cantidad en él colocada?*

Solución: Las cantidades colocadas en los sucesivos cuadros, en monedas de 10 céntimos, forman la progresión geométrica 1, 2, 4, 8, 16, ..., en la cual $a_1 = 1$, $r = 2$.

La cantidad en el enésimo cuadrado es $a_n = a_1\, r^{n-1} = 2^{n-1}$.

Pero 1000 duros = 50000 monedas de 10 céntimos; de modo que debemos hallar el menor valor de n, para el cual:

$$2^{n-1} > 50000; \quad \text{o bien} \quad 2^n > 100000.$$

Tomando logaritmos:

$$n \log 2 > 5$$

de donde:

$$n > \frac{5}{\log 2}; \quad \text{o sea:} \quad n > \frac{5}{0'30103} \sim 16'6.$$

Es decir, $n > 16'6$. Por lo tanto debe ser $\mathbf{n = 17}$, para que la cantidad colocada en el 17 cuadrado sea por primera vez mayor que 1000 duros.

91. **Interpolación.** — En una progresión geométrica todos los términos comprendidos entre dos cualesquiera se llaman *medios geométricos* de estos dos.

Interpolar *n medios geométricos entre dos números dados* a_1 *y* a_n *es formar una progresión geométrica de* $n + 2$ *términos cuyos extremos sean* a_1 *y* a_n.

Hallando la razón mediante la fórmula (1) queda resuelto el problema:

$$a_n = a_1\, r^{n+2-1} = a_1\, r^{n+1}$$

de donde:

$$\mathbf{r} = \sqrt[n+1]{\frac{a_n}{a_1}} \qquad (3)$$

Ejemplo. — *Interpolar tres medios geométricos entre* -1 *y* $-\frac{1}{16}$.

Solución: En este caso:

$$a_1 = -1 \quad a_n = -\frac{1}{16}, \quad n = 3.$$

Luego sustituyendo estos valores en la fórmula (3), resulta:

$$r = \pm \sqrt{\frac{1}{16}} = \pm \frac{1}{2}.$$

Si tomamos:

$$r = +\frac{1}{2}$$

la progresión pedida es:

$$-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}.$$

Y tomando:

$$r = -\frac{1}{2}$$

resulta la progresión:

$$-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}.$$

92. **Producto de los términos de una progresión geométrica.** — Como propiedad análoga a la ya demostrada de la suma de los términos de una progresión aritmética, demostraremos la del producto de los términos de una progresión geométrica.

Sea P ese producto:

$$P = a_1 \cdot a_1 \cdot r \cdot a_1 r^2 \cdot a_1 r^3 \cdot \ldots \cdot a_1 r^{n-2} \cdot a_1 r^{n-1}$$

por la ley conmutativa:

$$P = a_1 r^{n-1} \cdot a_1 r^{n-2} \cdot a_1 r^{n-3} \cdot a_1 r^{n-4} \cdot \ldots \cdot a_1 r \cdot a_1$$

multiplicando miembro a miembro:

$$P^2 = (a_1 \cdot a_1 r^{n-1})\ (a_1 r \cdot a_1 r^{n-2}) \ldots (a_1 r^{n-2} \cdot a_1 r)\ (a_1 r^{n-1} \cdot a_1).$$

Basta efectuar operaciones para ver que todos los paréntesis son iguales a:

$$a_1^2\, r^{n-1} = a_1 \,.\, a_1\, r^{n-1} = a_1 \,.\, a_n$$

$$\therefore P^2 = (a_1 \,.\, a_n)^n$$

y

$$\mathbf{P = \sqrt{(a_1 \,.\, a_n)^n}.}$$

Por tanto, *el producto de los* n *términos de una progresión geométrica es igual a la raíz cuadrada de la potencia enésima del producto de los extremos.*

Ejemplo. — *Producto de los* 5 *términos* 2, 4, 8, 16, 32:

$$P = \sqrt{(2 \times 32)^5} = \mathbf{32768.}$$

93. **Suma de los términos de una progresión geométrica.** — Llamando *s* a la suma de *n* términos consecutivos, se tiene:

$$s = a_1 + a_1\, r + a_1\, r^2 + a_1\, r^3 + \ldots + a_1\, r^{n-2} + a_1\, r^{n-1}.$$

Multiplicando por r, tenemos:

$$s\, r = a_1\, r + a_1\, r^2 + a_1\, r^3 + a_1\, r^4 + \ldots + a_1\, r^{n-1} + a_1\, r^n.$$

Restando de la segunda igualdad la primera, resulta:

$$s\, r - s = a_1\, r^n - a_1$$

o bien:

$$s\,(r - 1) = a_1\,(r^n - 1).$$

Luego:

$$\mathbf{s = \frac{a_1\,(r^n - 1)}{(r - 1)}} \qquad (4)$$

Pero:

$$a_1\,(r^n - 1) = a_1\, r^n - a_1 = a_1\, r^{n-1} \,.\, r - a_1 = a_n \,.\, r - a_1.$$

Luego también:

$$\mathbf{s = \frac{a_n \,.\, r - a_1}{r - 1}} \qquad (5)$$

La suma de n *términos consecutivos de una progresión geométrica limitada es igual al último término por la razón, menos el primero, dividido por la razón menos* 1.

Si se conocen tres de los números a_1, r, n, a_n, s, de una progresión geométrica, se pueden hallar los otros dos mediante las fórmulas (1) y (5).

Ejemplo 1. — *Hallar la suma de los* 6 *primeros términos de la progresión* 4, 6, 9, ...

Solución: En este caso:

$$a_1 = 4, \quad r = \frac{3}{2}, \quad n = 6.$$

Sustituyendo en la fórmula (4), tenemos:

$$s = \frac{4\left[\left(\frac{3}{2}\right)^6 - 1\right]}{\frac{3}{2} - 1} = \frac{4 \cdot \frac{3^6}{2^6} - 4}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{729}{16} - 4}{\frac{1}{2}} = \frac{729 - 64}{8} = \frac{\mathbf{665}}{\mathbf{8}}.$$

Ejemplo 2. — *El primer término de una progresión geométrica es* 3, *el último término es* 9375 *y la suma* 11718. *Hallar la razón y el número de términos.*

Solución: La fórmula (5) nos da:

$$11718 = \frac{9375 \cdot r - 3}{r - 1}$$

o sea, $11718\,r - 11718 = 9375\,r - 3$; $2343\,r = 11715$.

Resolviendo, sale $\mathbf{r = 5}$. Para el número de términos:

$$9375 = 3 \cdot 5^{n-1}; \quad 3125 = 5^{n-1}.$$

Se sabe que $3125 = 5^5$. Luego:

$$n - 1 = 5 \quad \mathbf{n = 6.}$$

94. **Progresiones geométricas ilimitadas.** — La fórmula (4) puede ponerse así:

$$s = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$$

o sea:

$$s = \frac{a_1}{1 - r} - \frac{a_1 r^n}{1 - r}.$$

Si n crece ilimitadamente, la suma s puede adquirir valores diferentes, según el valor que se dé a la razón r:

1.° Si $r > 1$, $r^n \to \infty$, y, por lo tanto, $s \to \infty$. (Núm. 22).

2.° **Si** $r < 1$, $r^n \to 0$. (Núm. 23). Luego el segundo término de la suma tiende a cero, y queda:

$$s = \frac{a_1}{1 - r} \qquad (6)$$

Esta expresión se llama la *suma de la progresión ilimitada.* Luego *la suma de una progresión geométrica ilimitada de razón menor que la unidad es igual al primer término dividido por* 1 *menos la razón.*

3.° **Si** $r = 1$, la suma $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots = a + a + a + a + \ldots$ tiende a ∞.

Ejemplo. — *Hallar la suma de la progresión ilimitada.*

$$1, \ {}^1/_2, \ {}^1/_4, \ {}^1/_8 \ \ldots$$

Solución: Sustituyendo en la fórmula (6), se tiene:

$$s = \frac{1}{1 - {}^1/_2} = \frac{1}{{}^1/_2} = \mathbf{2}.$$

95. Aplicación a la obtención de fracciones generatrices.

Ejemplo. — *Hallar el valor de* 12'636363...

Solución: La parte periódica puede escribirse así:

$$\frac{63}{100} + \frac{63}{10000} + \frac{63}{1000000} + \ldots$$

que es una progresión geométrica ilimitada, en la cual:

$$a_1 = \frac{63}{100} \quad \text{y} \quad r = \frac{1}{100}.$$

Luego por la fórmula (6), se tiene:

$$12'636363 \ldots = 12 + \frac{\frac{63}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = 12 + \frac{63}{100 - 1} = \frac{1263 - 12}{99} =$$

$$= \frac{1251}{99} = \frac{\mathbf{139}}{\mathbf{11}}$$

resultado que está conforme con la conocida regla de Aritmética para formar la fracción generatriz, de una decimal periódica pura.

EJERCICIOS

1. Hallar el octavo término de la progresión 1, 2, 4, ...
2. Hallar el duodécimo término de la progresión:

$$\frac{1}{1000}, \frac{1}{100}, \frac{1}{10}, \ldots$$

3. El primer término de una progresión geométrica es 4 y el sexto término es 128. Hallar la razón.
4. La razón de una progresión geométrica es 3 y el quinto término es 486. Hallar el primero
5. El primer término de una progresión geométrica es 3 y el tercero es 6. Hallar el sexto término.
6. El segundo término de una progresión geométrica es 3 y el quinto término es $\frac{81}{8}$. Hallar el cuarto término.

7. Hallar el quinto término de la progresión $\frac{2}{3\sqrt{2}}, 1, \frac{3\sqrt{2}}{2}, \ldots$

8. Al hacer el inventario al fin de cada año un fabricante deduce 10 % del valor de su maquinaria por causa de deterioro. La maquinaria costó 100000 pesetas. ¿Cuál es su valor al final del quinto año?

Indicación. — El valor al fin del primer año es 0'90 . 100000 pesetas; al fin del segundo año es 0'90 . 0'90 . 100000, o sea, $0'90^2$. 100000 pesetas, etcétera. ¿Cuál es la razón?

9. La población de una ciudad es de 100000 habitantes y crece 10 % cada año. ¿Cuál será la población al cabo de 10 años?
10. Una pelota cae desde la altura de 60 m. y rebota cada vez a 1/4 de la altura de que cae. ¿A qué altura subirá después de la octava caída?
11. Interpolar 5 medios geométricos entre 8 y 1/8.
12. Interpolar 5 medios geométricos entre 3/8 y 1536.
13. Hallar la suma de 10 términos de $1, x, x^2, \ldots$
14. Hallar la suma de 10 términos de 4/3, 2/3, 1/3, ...
15. La suma del primero y tercer término de una progresión geométrica es 40 y el segundo término es 16. Hallar los tres términos.
16. En una progresión geométrica cuyo primer término es 1/4, la suma de los 5 primeros términos es $\frac{211}{324}$. Hallar la razón, sabiendo que el quinto término es 4/81.
17. Calcular el valor de n para que se verifique:

$$3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^n = 363.$$

18. De una progresión geométrica se conocen el primero y el último término, que son 2 y 486, respectivamente, y las sumas de todos sus términos es 728. Hallar: 1.° La razón de la progresión; 2.° El número de términos de la misma; 3.° Formar la progresión.
19. Determinar una progresión geométrica de 7 términos, sabiendo que los tres primeros suman 26 y los tres últimos 2.106.
20. Determinar tres números en progresión geométrica conociendo su suma $s = 36'75$ y su producto, $p = 343$.

21. La suma de los términos de una progresión geométrica decreciente ilimitada es 4, y su primer término es 3. ¿Cuál sería la suma de los términos de la progresión que tuviera como términos a los cuadrados de los de la anterior?

22. Se inscribe en un cuadrado de lado 2 m. un círculo, en éste un cuadrado, en éste un círculo y así de nuevo e indefinidamente. Hallar el límite de la suma de las áreas de todos los cuadrados.

23. Suponiendo que numerador y denominador tienen infinitos términos, calcular el valor de la fracción:

$$\frac{1/3 + 1/9 + 1/27 + 1/81 + \ldots}{1/5 + 1/25 + 1/125 + 1/625 + \ldots}.$$

24. Tres números enteros están en progresión geométrica; si el segundo aumenta en 8 sin variar los otros dos, se convierte en otra aritmética; y si en ésta el último término aumenta en 64, vuelve a ser geométrica. ¿Cuáles son estos números?

25. Dada la sucesión de números:

$$a_1 = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}; \quad a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}-2}; \quad a_3 = \frac{1}{2}; \quad \ldots$$

decir qué clase de progresión forman y por qué. Hallar la suma de sus infinitos términos.

26. Escribir el término n-esimo y calcular la suma de la progresión:

$$\frac{3}{2}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{8}{27}, \quad \ldots$$

27. La suma de tres enteros en progresión geométrica es 35 y el producto de dichos números es 1.000. ¿Cuáles son dichos números?

28. Sabiendo que la presión atmosférica desciende en progresión geométrica cuando la altura a que nos elevamos crece en progresión aritmética, y que a los 5.500 metros de altitud es la mitad que al nivel del mar, calcular en milímetros de mercurio la presión que reinará a los 20.000 metros de altitud.

29. Una pelota cae de la altura de 100 m. y rebota hasta la quinta parte después de cada caída. ¿Cuál será el camino total recorrido después de la quinta caída?

30. La campana de una máquina neumática contiene 432 cm.^{3} de aire. En cada embolada se extrae $\frac{1}{12}$ del aire existente en la campana. ¿Cuánto aire se saca en 5 emboladas?

31. Un hombre ahorra cada año doble que el precedente, y ahorró 150 duros el primer año. ¿Cuántos años necesita para reunir 2250 duros?

32. De un vaso lleno de vino se retira la mitad del contenido y se reemplaza por agua. Se retira la mitad de esta mezcla y se la reemplaza por agua. Esto se repite cinco veces. ¿Qué parte de agua contiene el vaso?

33. Una persona envía una copia de una carta a cada uno de dos parientes, rogándoles que a su vez cada uno de ellos envíe una copia a otros dos parientes, y así sucesivamente. Después de 12 envíos, ¿cuántas copias se han hecho?

34. La suma de los 8 primeros términos de una progresión geométrica es 17 veces la suma de los 4 primeros. Hallar el valor de la razón.

35. La suma de los 10 primeros términos de una progresión geométrica es igual a 244 veces la suma de los 5 primeros términos, y la suma del cuarto y sexto términos es 135; hallar el primer término y la razón.

36. Hallar la suma de los 10 primeros términos de la progresión 6, 12, 24, ...

37. Calcular el producto de los 4 primeros términos de la progresión 3, 6, 12, 24, ...

38. Calcular el producto de los 5 primeros términos de la progresión $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$.

39. El producto de los 6 primeros términos de una progresión geométrica es $\sqrt{a^{21}}$ y el primer término $\sqrt{a}$. Hallar el último término y la razón.

40. Hallar 3 números en progresión geométrica cuyo producto es 328509, sabiendo que el mayor de ellos excede en 115 a la suma de los otros dos.

41. Tres números están en progresión geométrica. El segundo es 32 unidades mayor que el primero, y el tercero 96 unidades mayor que el segundo. Hallar estos números.

42. Una pelota de goma cae desde una altura de 40 m. y en cada rebote sube el 40 % de la altura anterior. Hallar de qué altura cae en su octavo descenso.

43. Hallar la suma de n términos de la progresión:

$$(x-y), \left(\frac{y^2}{x} - \frac{y^3}{x^2}\right), \left(\frac{y^4}{x^3} - \frac{y^5}{x^4}\right), \ldots$$

44. La suma de tres números en progresión geométrica es 70. Si el primero se multiplica por 4, el segundo por 5 y el tercero por 4, los números resultantes estarán en progresión aritmética. Hallar los tres números.

Hallar la suma de las siguientes progresiones ilimitadas:

45. $10, 5, 2\frac{1}{2}, 1\frac{1}{4}, \ldots$

46. $\sqrt{2}, 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1/2, \ldots$

47. 1'35, 0'045, 0'0015, ...

48. $2, \sqrt{2}, 1, \ldots$

49. En una progresión geométrica la razón es 1/4. ¿Cuál debe ser el primer término para que la suma de un número infinito de términos sea 80?

50. En una progresión geométrica el primer término es 5. ¿Cuál debe ser la razón para que la suma de un número infinito de términos sea 50/11?

51. En una progresión geométrica la suma de infinitos términos es 64 veces la suma de los 6 primeros. ¿Cuál es la razón?

52. El primer término de una progresión geométrica es 225 y el cuarto término es 72/5. Hallar la progresión y la suma de sus infinitos términos.

53. Se deja caer una pelota elástica desde la altura de 4'9 m. sobre un pavimento duro y rebota repetidamente. Si el tiempo de cada subida es 3/4 del tiempo de la caída precedente, probar que el tiempo que puede estar sal-

tando no excede de 7 segundos. (El tiempo necesario para la primera caída es 1 segundo.)

54. Se deja caer una pelota de goma desde la altura de 20 m. Después de cada rebote sube a 9/11 de la altura de que cae. ¿Qué espacio recorre antes de llegar al reposo?

55. Una pelota bota a 3/4 de la altura de que cae. Si se la lanza desde el suelo a la altura de 15 m., hallar la distancia total recorrida.

56. Las circunferencias A, B, C (figura 4), etcétera, son tangentes interiormente en D. El diámetro de B es la mitad que el de A, el diámetro de C

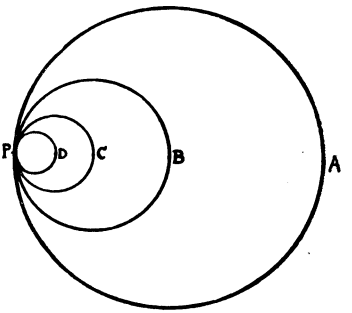


FIG. 4

es la mitad que el de B, etcétera. Si el diámetro de A es 6 cm. y el número de circunferencias así construídas es ilimitado, hallar la suma de las longitudes de estas circunferencias.

57. En la figura del ejercicio anterior el área del círculo B es 1/4 de la del círculo A; el área del círculo C es 1/4 de la del círculo B, etcétera. Si el diámetro de A es 4 cm., hallar la suma de las áreas.

14

Interés simple y compuesto

96. **Definiciones.** — *Interés* es la cantidad producida por un capital dado a préstamo.

Capital inicial es el capital dado a préstamo.

El interés puede ser simple y compuesto. Llámase *interés simple* cuando no pasa a formar parte del capital que lo ha producido; por tanto, el capital inicial permanece invariable; y se llama *interés compuesto* cuando se acumula, al final de períodos iguales, al capital existente en el período correspondiente, para producir nuevos intereses en el período siguiente.

Capital final es la suma del capital inicial y el interés producido.

Rédito o *tanto por ciento* es la ganancia que producen 100 unidades en un período (año, mes, día, etcétera). *Tanto por uno* es la ganancia que produce una unidad en un período; será la centésima parte del tanto por ciento. Por ejemplo, si 100 pesetas producen una ganancia de 6 pesetas en un año, el tanto por uno será: 6/100 = 0'06.

97. **Interés simple.** — Sea C el capital inicial; F, el capital final; *t*, el tiempo en años; I, el interés; *i*, el tanto por uno anual.

Como se conviene en que el interés sea *directamente proporcional* al capital prestado y al tiempo que dura el préstamo, se tendrá:

$$I = C\,t\,i; \qquad (1)$$

$$I = \frac{C\,t\,i}{12}; \qquad I = \frac{C\,t\,i}{360} \qquad (2)$$

98. **Interés en función del capital final.** — Se tiene:

$$F = C + I$$

y sustituyendo I por su valor (1):

$$F = C + C\,t\,i = C(1 + t\,i)$$

de donde:

$$C = \frac{F}{1 + t\,i} \qquad (3)$$

y además:

$$I = F - C = F - \frac{F}{1 + t\,i} = \frac{F + F\,t\,i - F}{1 + t\,i}$$

o sea:

$$I = \frac{F\,t\,i}{1 + t\,i} \qquad (4)$$

Ejemplo. — *¿Qué capital inicial se convertirá en* 558 *pesetas en seis años, prestado al* 4 *por* 100?

Solución: Sustituyendo en la fórmula (3) los símbolos por sus valores, se obtiene:

$$C = \frac{558}{1 + 6\,.\,0'04} = \frac{558}{1'24} = \mathbf{450\ ptas.}$$

99. **Interés compuesto.** — Los intereses se suman al capital cada semestre, cada mes, etcétera. Estos intervalos de tiempos, al cabo de los cuales se acumulan los intereses del capital, se llaman *períodos de capitalización*. De ordinario, el período de capitalización es un año.

Por consiguiente:

Durante el primer año, 1 peseta se convierte en $1 + i$.

C pesetas se convertirán en F_1.

de donde:

$$F_1 = C\,(1 + i).$$

Durante el segundo año 1 peseta se convierte en $1 + i$.

$C\,(1 + i)$ se convertirán en F_2.

de donde:

$$F_2 = C\,(1 + i)\,(1 + i) = C\,(1 + i)^2.$$

Repitiendo este proceso para los t años, resulta:

$$F_t = C\,(1 + i)^t \qquad (5)$$

Algunas veces se desea saber el capital inicial que al cabo de un número de años ha de convertirse en un capital determinado. Esto se consigue despejando C en la fórmula (5). Así:

$$C = \frac{F_t}{(1 + i)^t} = F_t\,(1 + i)^{-t} \qquad (6)$$

Si suponemos que la acumulación de intereses se hace m veces por año, el período de capitalización será $\frac{1}{m}$ de año. Luego el tanto por uno y por período es $\frac{i}{m}$, y el número de períodos de capitalización vale t . m. Razonando de un modo análogo al anterior, se obtiene:

$$\mathbf{F_t = C\ (1 + \frac{i}{m})^{tm}} \qquad (7)$$

y despejando C:

$$\mathbf{C = F_t\ (1 + \frac{i}{m})^{-tm}} \qquad (8)$$

Siempre que no se especifique, se entenderá que el período de capitalización es un año.

Ejemplo 1. — *¿Cuál será el capital final en que se convierten* 150 *pesetas en* 4 *años al* 6 *por* 100 *anual, si el período de capitalización es de* 6 *meses?*

Solución: Sustituyendo en la fórmula (7), se tiene:

$$F_4 = 150\left(1 + \frac{0'06}{2}\right)^{2\cdot 4}$$

$$= 150\ (1 + 0'03)^8$$

$$= 150\ (1'03)^8$$

$$\log F_4 = \log 150 + 8 \log 1'03$$

Cálculos

$\log 1'03 = 0'0128$

$\times 8$

$0'1024$

$\log\ 150 = 2'1761$

$\log F_4 = 2'2785$

Luego $\mathbf{F_4 = 189'90\ ptas.}$

Ejemplo 2. — *Hallar el capital inicial que en tres años de interés compuesto al* 4 *por* 100, *se convierte en* 1250 *ptas.*

Solución: Sustituyendo en la fórmula (6), se tiene:

$$C = 1250\ (1 + 0'04)^{-3}$$

$$C = 1250\ (1'04)^{-3}$$

$$\log C = \log 1250 - 3 \log 1'04$$

Cálculos

$\log 1250 = 3'0969$

$\log 1'04 = 0'0170$

$\times 3$

$\log\ (1'04)^3 = 0'0510$

$\log C = 3'0459$

Luego $\mathbf{C = 1112\ ptas.}$

Ejemplo 3. — *¿Cuál es el tanto por ciento de interés que hace que un capital de* 13000 *ptas. se convierta en* 15000 *ptas. en cuatro años, si se capitaliza por meses?*

Solución: Sustituyendo en la fórmula (7), resulta:

$$15000 = 13000\,(1 + \frac{i}{12})^{48}$$

de donde

$$\frac{15}{13} = (1 + \frac{i}{12})^{48}.$$

Extrayendo la raíz de índice 48 y tomando logaritmos en ambos miembros se obtiene:

$$\log (1 + \frac{i}{12}) = \frac{\log 15 - \log 13}{48} = \frac{0'062}{48} = 0'0012;$$

de donde:

$$1 + \frac{i}{12} = \text{antilog } 0'0012 = 1'003;$$

o sea:

$$i = 12\,(1'003 - 1) = 12\ .\ 0'003 = 0'036.$$

Luego el tanto por ciento anual será **3'6 %**.

Ejemplo 4. — *¿Cuánto tiempo tardará en duplicarse un capital C, colocado a interés compuesto al* 6 *%?*

Aplicando la fórmula (5):

$$F_t = 2\,C = C\,(1'06)^t$$

o sea:

$$2 = 1'06^t.$$

Tratándose de una ecuación exponencial, tomaremos logaritmos:

$$\log 2 = t \log 1'06;$$

de donde:

$$t = \frac{\log 2}{\log 1'06} = \frac{0'3010}{0'0253} = \textbf{11'8 años} \text{ aproximadamente.}$$

EJERCICIOS

1. ¿En cuántos años 960 ptas., colocadas al 5 % de interés simple, producirán 126 ptas. de interés?
2. Si 90 ptas., al cabo de 3 años se han convertido en 120 ptas., ¿a qué tanto por ciento de interés simple estuvieron colocadas?
3. ¿En cuántos años 525'50 ptas., colocadas al $4\frac{1}{4}$% de interés simple, se convierten en 693'66 pesetas?
4. Hallar el capital final en que se han convertido 1000 ptas. prestadas durante tres años al 4 % de interés compuesto, con acumulación: *a*) anual; *b*) semestral; *c*) trimestral.
5. ¿Qué capital inicial prestado al 2 % de interés compuesto durante 6 años se convertirá en 750 ptas.?
6. Hallar el capital final en los ejemplos siguientes:

a) 325'50 duros al 4 % por 10 años con acumulación anual.
b) 435'75 duros al 6 % por 4 años, con acumulación semestral.
c) 1500 duros al 8 % por 3 años, con acumulación trimestral.
d) 1800 duros al 4'5 %, con acumulación anual, por 10 años.

7. ¿En cuántos años 236 duros, colocados al 5 % de interés compuesto, se convertirán en 316'26 duros?
8. Si 240 duros de capital inicial se convierten en 10 años en 307'22 duros, ¿cuál es el tanto por ciento de interés compuesto?
9. Si el valor inicial es 299'18 duros y en 4 años se convierten en 350 duros, ¿cuál es el tanto por ciento de interés compuesto?
10. ¿Por cuánto tiempo se debe prestar una suma para que al 6 % de interés compuesto se duplique, con acumulación: *a*) semestral; *b*) trimestral; *c*) mensual?
11. ¿A qué tanto por ciento debe prestarse para que se duplique en *a*) 10 años; *b*) 15 años; *c*) 20 años, un capital puesto a interés compuesto?
12. ¿Qué cantidad se pagará al final del tercer año si se desea liquidar dos deudas, una de 1000 ptas., que vence en el primer año, y otra de 2000 pesetas, que vence al cuarto año, si el tanto por ciento de interés simple es 4?
13. Un pueblo tenía 2100 habitantes en 1960. Si la población crece en 5 % por cada año sobre la del año anterior, ¿qué número de habitantes tendrá en 1968?
14. Un hombre espera heredar 50000 ptas. al cabo de 10 años. ¿Cuál es el valor actual de su herencia, si produce 5 % y tiene acumulación semestral?
15. Puede venderse un objeto por 325 ptas. al contado, o por 350 ptas. pagaderas al cabo de un año. ¿Cuál es mejor oferta si puede colocarse el dinero al 9 % de interés simple?
16. Un bosque está tasado en 50000 ptas. y cada año crece uniformemente el valor en 7 % anual. ¿Cuál será el valor al cabo de 20 años?
17. Dos capitales, de los que el primero es 500 ptas. mayor que el segundo, se colocan al 3'5 % y al 5 % de interés compuesto, respectivamente. Hallarlos, sabiendo que en 20 años dan el mismo capital final.
18. Hallar en cuántos años se duplicará el número de habitantes de una población que experimenta un aumento anual del 12 por 1000.
19. Se calcula que un bosque tiene 24.000 metros cúbicos de madera y que aumenta en un 2'5 % al año. ¿Cuánta madera tendría al cabo de dos años?
20. ¿Qué tiempo ha de transcurrir para que un capital colocado a interés simple del 5 % se triplique?
21. Sin auxilio de tablas, calcular el tanto por ciento a que se ha de colocar un capital de 10.000 ptas. durante dos años, para que produzca, a interés compuesto, 302'25 ptas.

15

Anualidades

100. **Definición.** — *Anualidades* son pagos iguales y periódicos. Así, los pagos iguales y anuales de la renta de una finca, los pagos mensuales de la renta de una casa o de un piso, las primas de seguros, etcétera, son ejemplos de anualidades. Estas entregas se llaman anualidades porque frecuentemente se hacen cada año.

Las anualidades que aquí estudiamos pueden tener por fin: 1.°, pagar una deuda adquirida a interés compuesto, y se llamará *anualidad de amortización;* 2.° formar con ellas y sus intereses compuestos un capital, y se llamará *anualidadad de capitalización.*

101. **Anualidades de amortización.** — ANUALIDADES DE AMORTIZACIÓN *son unos pagos iguales que se hacen al fin de cada año para amortizar o extinguir una deuda y sus intereses compuestos en el número de años que dura la deuda.*

La suma de todas las anualidades y de los intereses compuestos de cada una de ellas ha de sumar una cantidad igual al capital prestado con sus intereses compuestos producidos en el tiempo que dure el préstamo.

Sea C la deuda adquirida, que, al cabo de los t años que ha de durar la deuda, se habrá convertido en:

$$C(1 + i)^t.$$

Sea a la anualidad pagada.

La primera anualidad en $t - 1$ años se convierte en $a(1 + i)^{t-1}$.

La segunda anualidad en $t - 2$ años se convierte en $a(1 + i)^{t-2}$.

... ...

La n-sima anualidad se paga al terminar la deuda ... a.

La suma de estas cantidades será igual a $C(1 + i)^t$.

Luego:

$$a(1 + i)^{t-1} + a(1 + i)^{t-2} + \ldots + a(1 + i) + a = C(1 + i)^t$$

o sea:

$$a[(1 + i)^{t-1} + (1 + i)^{t-2} + \ldots + (1 + i) + 1] = C(1 + i)^t.$$

Los términos contenidos en el paréntesis cuadrado forman una progresión geométrica de razón 1 + i, si empezamos a contar por el último, con lo que, aplicando la fórmula (5) del número 93, su suma valdrá:

$$\frac{(1+i)^{t-1}(1+i)-1}{1+i-1} = \frac{(1+i)^t-1}{i}.$$

Sustituyendo este valor en la expresión anterior:

$$\mathbf{a\,\frac{(1+i)^t-1}{i} = C\,(1+i)^t} \qquad (1)$$

Ejemplo 1. — *Una Sociedad pide prestadas* 50000 *ptas., y quiere extinguir la deuda en* 20 *años. ¿Qué cantidad pagará si el tanto por ciento es* 4?

Solución: De la fórmula (1) sale:

$$a = \frac{C\,(1+i)^t \,.\, i}{(1+i)^t - 1};$$

y sustituyendo:

$$a = \frac{50000\,(1'04)^{20}\,.\,0'04}{1'04^{20}-1}$$

$$\log a = \log 50000 + 20 \log 1'04 + \log 0'04 + \operatorname{colog}(1'4^{20}-1)$$

$$\begin{aligned} \log 50000 &= 4'6990 \\ \log\ \ 0'04 &= 2'6021 \\ 20 \log\ \ 1'04 &= 0'3406 \\ \operatorname{colog}(1'04^{20}-1) &= 1'9241 \\ \hline \log a &= 3'5658 \end{aligned}$$

$$a = \text{antilog } 3'5658 = \mathbf{3679\ ptas.}$$

Para calcular el cologaritmo del denominador se procede así:

$$20 \log 1'04 = 0'3407;\ \text{luego}\ (1'04)^{20} = 2'1911.$$

Por tanto:

$$(1'04)^{20} - 1 = 1'1911$$

$$\log 1'1911 = 0'0759;\ \operatorname{colog} 1'1911 = 1'9241.$$

Ejemplo 2. — *¿Cuántos años se necesitan para amortizar una deuda de* 500000 *pesetas, contraída al* 4 *% de interés compuesto, si cada año se entrega una anualidad igual al* 5 *% del capital inicial?*

Solución: La anualidad constante será:

$$\frac{5\,.\,500000}{100} = 25000\ \text{ptas.}$$

De la fórmula (1) sale sucesivamente:

multiplicando por i:

$$a\,[(1+i)^t - 1] = i\,C\,(1+i)^t$$

efectuando el producto:

$$a(1+i)^t - a = iC(1+i)^t$$

trasponiendo términos:

$$a(1+i)^t - iC(1+i)^t = a$$

sacando factor común $(1+i)^t$:

$$(a - iC)(1+i)^t = a$$

y tomando logaritmos:

$$\log(a - iC) + t\log(1+i) = \log a$$

de donde:

$$\mathbf{t = \frac{\log a - \log (a - i\,C)}{\log (1+i)}} \qquad (2)$$

Sustituyendo en esta fórmula, resulta:

$$t = \frac{\log 25000 - \log (25000 - 0'4 \,.\, 500000)}{\log 1'04} = \frac{\log 25000 + \operatorname{colog} 5000}{\log 1'04} =$$

$$= \frac{4'3979 + \bar{4}'3010}{0'0170} = \frac{0'6989}{0'0170} = \mathbf{41\ años.}$$

102. **Anualidades de capitalización.** — Anualidad de capitalización son unos *pagos iguales que se hacen al principio de cada año para reunir con ellos y sus intereses compuestos un capital.*

Sea *a* la anualidad y calculemos el capital F que se habrá formado al cabo de *t* años, siendo *i* el tanto por 1.

La primera anualidad en *t* años se convierte en ... $a(1+i)^t$.

La segunda anualidad en $t-1$ años se convierte en $a(1+i)^{t-1}$.

... ...

La n-sima anualidad en 1 año se convierte en ... $a(1+i)$.

La suma de estas cantidades es el capital F formado:

$$F = a(1+i)^t + a(1+i)^{t-1} + \ldots + a(1+i) =$$
$$= a(1+i)\,[(1+i)^{t-1} + (1+i)^{t-2} + \ldots + 1].$$

Si empezamos a contar por el último término, los términos del corchete forman una progresión geométrica de razón $1+i$, y con *n* términos, cuya suma se calculó en el número anterior, luego:

$$\mathbf{F = \frac{a(1+i)\,[(1+i)^t - 1]}{i}} \qquad (3)$$

Ejemplo 1. — *Un señor ahorra, entre tabaco y bebidas,* 400 *duros anuales. Si los coloca en un Banco durante* 15 *años al* 5 *% de interés compuesto, ¿cuánto importará el capital formado?*

Solución: De la fórmula (3), sustituyendo, sale:

$$F = \frac{400 \cdot 1'05\,[(1'05)^{15} - 1]}{0'05}$$

$$F = 8000 \cdot 1'05 \cdot 1'08 = \textbf{9072 duros.}$$

$$\log 1'05 = 0'0212$$
$$\times\ 15$$
$$\log (1'05)^{15} = 0'3180$$

Luego $(1'05)^{15} = 2'08$

Ejemplo 2. — *¿Qué anualidad habrá de colocarse al 5 % de interés compuesto para reunir en 15 años un capital de 1500000 pesetas?*

Solución: Sustituyendo en la fórmula (3) y despejando:

$$1500000 = \frac{a \cdot 1'05\,(1'05^{15} - 1)}{0'05}$$

$$a = \frac{1500000 \cdot 0'05}{1'05\,(1'05^{15} - 1)}$$

$$\log a = \log 1500000 + \log 0'05 + \text{colog } 1'05 + \text{colog } 1'08$$

pues según el ejemplo anterior:

$$1'05^{15} - 1 = 1'08.$$

$$\log 1500000 = 6'1761$$
$$\log \quad 0'05 = \bar{2}'6990$$
$$\text{colog} \quad 1'05 = \bar{1}'9788$$
$$\text{colog} \quad 1'08 = \bar{1}'9666$$
$$\log a \quad = 4'8205$$

$a = \text{antilog } 4'8205 = \textbf{66150 pesetas.}$

Ejemplo 3. — *¿Durante cuánto tiempo habremos de estar colocando anualidades de 20000 pesetas al 5 % de interés para reunir un capital de 453600 pesetas?*

Solución: Reemplazando en la fórmula (3) y despejando:

$$453600 = \frac{20000 \cdot 1'05 \cdot (1'05^t - 1)}{0'05}$$

$$1'05^t - 1 = \frac{453600 \cdot 0'05}{20000 \cdot 1'05} = \frac{22680}{21000} = \frac{2268}{2100}$$

$$1'05^t = \frac{2268}{2100} + 1 = \frac{4368}{2100}.$$

Para resolver esta ecuación exponencial, tomemos logaritmos en ambos miembros:

$$t \log 1'05 = \log 4368 - \log 2100$$

$$t = \frac{\log 4368 - \log 2100}{\log 1'05} = \frac{0'3180}{0'0212} = \textbf{15 años.}$$

Tanto en la fórmula (1) como en la fórmula (3) es imposible despejar *i*. El tanto por ciento no se halla, pues, directamente, sino por aproximaciones sucesivas o mediante tablas. El único caso en que puede hallarse *r* fácilmente es cuando se trata de dos anualidades solamente, pues entonces se tendrá:

$$a\,(1 + i)^2 + a\,(1 + i) = F$$

ecuación de segundo grado si se considera (1 + i) como incógnita y a y F conocidas. Hallado 1 + i, el cálculo de i es inmediato, así, como el de r o tanto por ciento.

EJERCICIOS

1. ¿Qué anualidad se ha de pagar para amortizar en 8 años una deuda de 40000 pesetas al 4 por 100 anual?
2. ¿Qué cantidad se ha de destinar anualmente para amortizar una deuda en 4 años y satisfacer los intereses a razón del 6 por 100 anual?
3. Hallar el capital en que se convierte una anualidad de 2500 pesetas pagada durante 8 años al 4'5 por 100.
4. Un señor deposita 1500 pesetas cada año en un Banco que paga 3'5 por 100. ¿Qué capital ha reunido al cabo de 6 años?
5. Un Ayuntamiento hace un empréstito de 30 millones de pesetas al 5 por 100, emitiendo 60000 obligaciones de 500 pesetas amortizables en 40 años. ¿Qué cantidad destinará el Ayuntamiento anualmente para atender al pago de los intereses y de las obligaciones amortizadas?
6. Un hombre compra un automóvil y conviene en pagar 15000 pesetas al contado y 15000 pesetas al principio de cada uno de los tres años inmediatos. ¿Cuál es el valor del automóvil, si el dinero se coloca al 7 por 100, con capitalización anual?
7. Una Sociedad proyecta emitir un empréstito de 2 millones de pesetas al 4 por 100, contando con un fondo anual de 100000 pesetas, para el pago de intereses y amortización de la deuda. ¿Cuántos años tardará en extinguirla por completo?
8. Un hombre debe 25000 pesetas, sin interés, pagaderas al terminar el quinto año. ¿Qué cantidad debe depositar en un Banco cada año para extinguir esta deuda, si el Banco paga 4 por 100 de interés y la capitalización es anual?
9. Resolver el problema anterior, suponiendo que la nota de 25000 ptas. está cargada en 2'5 por 100 de interés y la capitalización es anual.
10. Una finca puede producir un beneficio de 600 pesetas, después de pagar contribuciones, seguros, etcétera. ¿Cuál es el valor de la finca, si se sabe que sus beneficios durante 10 años, colocados a interés compuesto de 5 por 100, pagan la finca?
11. Un empréstito de 8 millones de pesetas, fue amortizado pagando una anualidad de 408160 pesetas. El tanto por 100 de interés anual es de 3 por 100. ¿En cuántos años se amortizó?
12. La prima de una póliza pagadera por anticipado es 250 pesetas. ¿Cuánto importará al cabo de 20 años, si el dinero produce el 6 por 100?
13. Una Sociedad hace un empréstito de 5 millones de pesetas al 5 por 100, amortizable a los 50 años. ¿Qué fondo anual ha de destinar a la amortización?
14. Un señor vende una finca por 30000 pesetas. El comprador debe pagar en 6 pagos iguales, el primero en el acto de la firma del contrato y los otros en cada uno de los 5 años siguientes. ¿Cuánto vale la anualidad al 5 por 100?
15. Un hombre paga 52'5 pesetas al principio de cada uno de 7 años para construir una acera delante de su casa. ¿Cuál es el coste de la acera si el propietario de la casa sólo paga la mitad de la cantidad en ella invertida y si el interés es de 5 por 100 anual?
16. Dadas dos anualidades, cada una de 200000 pesetas, que se convierten en un capital de 421245 pesetas, hallar el tanto por ciento a que fueron colocadas.
17. Mediante dos anualidades de 50000 pesetas se amortizan 93633'39 pesetas. Calcular el tanto por ciento de amortización.

16

Métodos de resolución de problemas

103. **Problema.** — Problema es toda cuestión que tiene por objeto hallar una o más cantidades *desconocidas* o *incógnitas,* por medio de otras conocidas, llamadas datos, conociéndose también ciertas relaciones que ligan las primeras con las segundas.

En Geometría, el problema puede tener también por objeto la construcción de una figura geométrica cuyos elementos gozan de ciertas propiedades dadas.

104. **Enunciado.** — Enunciado del problema es la proposición que expresa el fin que nos proponemos conseguir. En el enunciado se expresan las condiciones que deben cumplir las cantidades que se desea hallar.

105. **Resolución de un problema.** — Resolución de un problema es el procedimiento mediante el cual se determina el valor de las incógnitas. Los valores de las incógnitas se llaman *soluciones* o *raíces* del problema.

Luego, *resolver un problema es hallar sus raíces o soluciones.*

106. **Partes de que consta la resolución de un problema.** — La resolución de todo problema comprende *cinco* partes, que son:

1.ª *La elección de la incógnita o incógnitas.*
2.ª *El planteo.*
3.ª *La resolución de la ecuación resultante del planteo.*
4.ª *La comprobación.*
5.ª *La discusión.*

Elección de las incógnitas. — En general, se toman como incógnitas las cantidades cuyo hallazgo constituye el objeto del problema; y se las representa por las últimas letras del abecedario, x, y, z, ... u, etcétera. Conviene analizar bien el enunciado del problema para elegir el menor número posible de incógnitas, cuando el enunciado no dé las cantidades que han de figurar como tales en el problema. Cuando esto ocurra, se elegirán de tal modo que conduzcan fácilmente al resultado de la cuestión, y determinen sin ambigüedad la solución del problema.

El planteo. — El planteo del problema consiste en expresar, mediante ecuaciones o inecuaciones, las relaciones que existen entre los datos y las incógnitas del problema.

Un modo de llegar siempre al planteo es el uso del *método analítico,* que consiste en *suponer halladas las incógnitas, sometiéndolas a la serie de operaciones que deberían efectuarse con ellas para averiguar si satisfacen sus valores a las condiciones del problema.* De este modo, se traduce el enunciado en ecuaciones e inecuaciones que plantean el problema.

El planteo de un problema requiere un conocimiento perfecto del enunciado del problema, y además, en muchos casos, ideas claras y precisas sobre la ciencia a que se refiere el enunciado (Geometría, Física, Química, etcétera), pues de otra manera no es posible hallar fácilmente *qué cosa es igual a otra* para traducir el enunciado en una *ecuación.*

Comprobación. — La comprobación consiste en sustituir los valores numéricos obtenidos como soluciones en las ecuaciones a que dio origen el planteo, para ver si éstas quedan satisfechas o no.

Discusión. — La discusión del problema consiste en el examen de las soluciones obtenidas en todas las hipótesis que ofrece la cuestión, interpretando los resultados.

Así, si la solución obtenida es positiva y fraccionaria, y las condiciones físicas del problema piden para la incógnita números enteros, habrá que desecharla.

Si la ecuación da una solución negativa y la cantidad correspondiente no admite sentidos opuestos, dicha solución negativa indicará *imposibilidad* absoluta del problema.

La solución *nula,* aunque indica que no existe la cantidad buscada, puede tener sentido y aceptarse si por ejemplo se trata de la distancia entre dos puntos o de un intervalo de tiempo entre dos sucesos, ya que entonces significará coincidencia o simultaneidad, y el problema tendrá realidad.

La solución *infinita* en general indica que el problema es imposible.

107. **El método reductivo.** — El método reductivo o de *sustituciones sucesivas* consiste en referir el problema propuesto a otro, éste a un tercero, y así sucesivamente, hasta llegar a uno conocido o que se resuelva inmediatamente. Esta marcha intuitiva del espíritu es la que se aplica en mayor o menor escala en casi todos los problemas, y, en general, cuando se trata de demostrar una proposición cualquiera. Así, si se quiere probar una verdad A, se reduce a otra B, ésta, a otra C, y así, sucesivamente hasta llegar a una proposición evidente o ya establecida.

Pero para justificar este razonamiento es preciso que entre las proposiciones A, B, C, ... exista reciprocidad; esto es, que la verdad de una cualquiera de ellas implique la exactitud de las que le preceden y siguen.

En cursos anteriores hemos aplicado este método bastantes veces. Así, trazar una paralela a una recta dada se reduce a construir un ángulo igual a otro; trazar la bisectriz de un ángulo equivale a dividir en dos partes iguales su arco correspondiente, o sea la cuerda de éste; es decir, trazar la perpendicular en su punto medio, y a este problema se reducen también, en último término, todos los de trazados de perpendiculares; trazar la tangente común a dos circunferencias requiere resolver antes el problema de trazar una tangente a una circunferencia por un punto exterior; y así otros muchos ejemplos.

108. **Fórmulas generales.** — Un problema puede ser *particular* o *general*. En el primer caso los datos vienen expresados por *números;* en el segundo se expresan por *letras*.

Cuando se quiere discutir o interpretar las soluciones se establecen ecuaciones generales.

Las soluciones de un problema general son *fórmulas* que expresan el valor de la incógnita o incógnitas en *función* de los datos y sirven para resolver todos los problemas que tengan el mismo enunciado y difieran sólo en los valores particulares de los datos. Una vez hallada la fórmula general que resuelve un problema general, se hallarán las soluciones correspondientes a los problemas particulares mediante una sencilla sustitución de valores.

109. **Ejemplos de problemas algebraicos. Ejemplo 1.** — *Un labrador tiene* 450 *pesetas en dinero y además recibe el importe de* 7 *sacos de avena. Luego invierte los* $\frac{3}{4}$ *del dinero que tiene en pagar una deuda; por fin vende otros* 5 *sacos de avena al mismo precio que antes, hallándose entonces con un total de* 477 *pesetas. ¿A cómo vendió el saco de avena?*

a) *Planteo:* Sea x el precio del saco de avena.

Después de vender los 7 sacos, tiene:

$$450 + 7x.$$

Como gasta los $\frac{3}{4}$ de esta cantidad, le quedan:

$$\frac{450 + 7x}{4}.$$

Después de la segunda venta de avena, tendrá:

$$\frac{450 + 7x}{4} + 5x;$$

y como entonces posee 477 ptas., se tendrá la ecuación:

$$\frac{450 + 7x}{4} + 5x = 477.$$

b) *Resolución:* Quitando el denominador, se tiene:

$$450 + 7x + 20x = 1908$$
$$27x = 1458$$
$$x = 54 \text{ ptas.}$$

Solución: El precio del saco de avena es **54 ptas.**

Ejemplo 2. — *Una aldeana lleva al mercado una cesta de huevos. Si después de vender* $\frac{2}{9}$ *de los que llevó menos 5 huevos, añadiese 37 huevos a los que le quedan, entonces el número de huevos que llevó al mercado quedaría aumentado en* $\frac{1}{6}$. *¿Cuántos huevos llevaba en la cesta?*

a) *Planteo:* Sea x el número de huevos que llevaba en la cesta.

Después de vender $\frac{2x}{9} - 5$, le quedan:

$$x - \left(\frac{2x}{9} - 5\right) = \frac{7x}{9} + 5.$$

Si a éstos se añaden 37, entonces x queda aumentado en $\frac{x}{6}$. Luego la ecuación será:

b) *Resolución:*

$$\frac{7x}{9} + 5 + 37 = x + \frac{x}{6}$$

de donde

$$\frac{7x}{9} + 42 = \frac{7x}{6}.$$

Quitando denominadores resulta:

$$14x + 756 = 21x;$$

luego

$$x = 108 \text{ huevos.}$$

Solución: La cesta contenía **108 huevos.**

Ejemplo 3. — *Una aleación de plomo y estaño pesa 65 kg. Cuando se la sumerge en el agua pesa sólo 57'5 kg. ¿Cuál es el peso de cada metal, sabiendo que la densidad del plomo es 11'40 y la del estaño 7'30?*

a) *Planteo:* Según el principio de Arquímides, el peso del agua desalojada es $65 - 57'5 = 7'5$ kg.

Luego el volumen de la aleación es 7'5 dm.³

Sea x el peso del plomo; el del estaño será $65 - x$.

Dividiendo estos pesos por la densidad respectiva, se tienen los volúmenes:

$$\frac{x}{11'4} \text{ para el plomo, y } \frac{65 - x}{7'3} \text{ para el estaño.}$$

Luego:

$$\frac{x}{11'4} + \frac{65 - x}{7'3} = 7'5.$$

Resolución: Quitando denominadores se tiene:

$$7'3\,x + 14'4\,(65 - x) = 7'5 \cdot 11'4 \cdot 7'3$$

o sea:

$$-4'1\,x + 741 = 624'15$$

de donde:

$$x = 28'5 \text{ kg.}$$

Solución: El peso del estaño es:

$$65 - x = 65 - 28'5 = \mathbf{36'5\ kg.},$$ y el del plomo **28'5 kg.**

Ejemplo 4. — *Un tendero vende* $\frac{1}{3}$ *de las manzanas que tiene; luego vende* $\frac{1}{5}$ *más* 8 *manzanas. Si le quedan aún los* $\frac{7}{15}$ *menos* 5 *manzanas por vender, ¿cuántas manzanas tenía al principio?*

a) *Planteo:* Sea x el número de manzanas que tenía.

Vendió:

$$\frac{x}{3} + \frac{x}{5} + 8 = \frac{8x}{15} + 8 \text{ manzanas}$$

luego le quedan:

$$x - \left(\frac{8x}{15} + 8\right) = \frac{7x}{15} - 8 \text{ manzanas.}$$

Por tanto, la ecuación del problema es:

$$\frac{7x}{15} - 8 = \frac{7x}{15} - 5.$$

b) *Resolución:*

$$\frac{7x}{15} - \frac{7x}{15} = 8 - 5$$

o sea:

$$0 \cdot x = 3$$

$$x = \frac{3}{0}. \text{ Imposible dividir por 0.}$$

Solución: Ya que la ecuación es imposible, el problema **carece de solución.**

Ejemplo 5. — *¿Cuántos niños asisten a una clase, sabiendo que el número de los que asisten es inferior a* 40 *y que, disminuído dicho número en su mitad más* 8, *resulta igual a* 4 *veces su octava parte menos* 2?

a) *Planteo:* Sea x el número de niños de la clase.

Por el enunciado del problema se tiene:

$$x - \frac{x}{2} - 8 = 4\left(\frac{x}{8} - 2\right).$$

b) *Resolución:* Resolviendo esta ecuación da:

$$8x - 4x - 64 = 4x - 64$$

o sea:

$$8x - 8x = 64 - 64$$
$$0 \cdot x = 0 \quad \text{Indeterminado.}$$

Solución: El problema es indeterminado.

c) *Discusión:* La ecuación $0 \cdot x = 0$ queda satisfecha por infinidad de valores de x, pero no ocurre lo mismo con el problema, pues éste exige que el número de niños de la clase sea un número positivo, entero y múltiplo de 8 y menor que 40.

Los únicos números que cumplen estas condiciones del problema son: **8, 16, 24, 32.**

Ejemplo 6. — *Un padre tiene* 43 *años y su hijo* 23. *¿Después de cuántos años la edad del padre será el doble de la edad del hijo?*

a) *Planteo:* Sea x el número de años pedido. Al cabo de estos años, la edad del padre será $43 + x$, y la del hijo $23 + x$. Luego se cumplirá que:

$$43 + x = 2(23 + x).$$

b) *Resolución:*

$$43 + x = 46 + 2x;$$

de donde.

$$x = -3. \quad \text{Imposible.}$$

Solución: El problema es **imposible.**

c) *Discusión:* Pero se puede interpretar la respuesta del modo siguiente. Añadir (-3) años a la edad del padre y a la edad del hijo, es restarles 3 años. La respuesta satisface al problema si se conviene en modificar así el enunciado: *¿Cuántos años hace que la edad del padre era doble que la edad del hijo?*

110. **Problema de los móviles en línea recta.** — *Dos autos se mueven sobre una recta X' X, de izquierda a derecha, con velocidades constantes, el 1.°, con velocidad de v_1 m/seg.; y el otro con la v_2 m/seg., pasando éste por el punto A_2 de su camino al mismo tiempo que el 1.° pasa por el A_1 que se halla d metros detrás de A_2. ¿A qué distancia del punto A_1 se verifica el encuentro?* (Fig. 5).

a) *Planteo.* — Sea E el punto de encuentro, $A_1 E = x$; $A_1 A_2 = d$; $A_2 E = x - d$.

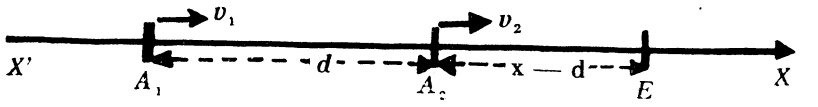


FIG. 5

Siendo el tiempo igual al espacio dividido por la velocidad, el problema queda planteado al igualar los tiempos de cada móvil.

$$\frac{x}{v_1} = \frac{x - d}{v_2}.$$

b) *Solución:*

$$x = \frac{v_1 d}{v_1 - v_2} \qquad (1)$$

fórmula general que resuelve el problema.

c) *Discusión.* — Para la discusión distinguimos:

1.° $v_1 > v_2$; luego *x es positivo* y mayor que *d*, lo que es evidente.

2.° $v_1 < v_2$; luego *x es negativo*, y por tanto el encuentro tuvo lugar a la izquierda de A_1 y *antes* del paso de los autos por los puntos A_1 y A_2.

3.° $v_1 = v_2$, luego $x = \infty$, lo que expresa *imposibilidad*, pues los dos móviles que van con la misma velocidad estarán siempre a la distancia *d* uno de otro.

4.° $v_1 \neq v_2$, $d = 0$, luego los dos móviles sólo se encuentran en su paso por A_1, único encuentro, y luego se separan.

5.° $v_1 = v_2$, $d = 0$, luego $x = \frac{0}{0}$, lo que expresa *indeterminación*, que corresponde al caso de andar los dos juntos con igual velocidad.

6.° Si, modificando el enunciado del problema, se supone que las velocidades v_1 y v_2 son de signo contrario, por ejemplo, $v_1 > 0$ y $v_2 < 0$, entonces se tiene:

$$x = \frac{v_1 d}{v_1 + v_2} \qquad (2)$$

y el punto de encuentro estará entre A_1 y A_2, pues en este caso los móviles marchan en sentido contrario.

Si en la misma hipótesis, $v_1 = v_2$, se tendrá:

$$x = \frac{d}{2};$$

es decir, el punto de encuentro se halla a la mitad del camino que separa A_1 de A_2.

7.° Si $v_1 = 0$, sin serlo v_2 y d, la ecuación (1) da:

$$x = \frac{0}{-v_2} = 0,$$

es decir, el punto de encuentro está en A_1.

Análogamente, si es $v_2 = 0$, sin serlo v_1 y d, la ecuación (1) da:

$$x = d,$$

el encuentro se verifica en A_2.

111. **Problema geométrico.** — Tiene por objeto construir o determinar una figura cuyos elementos han de satisfacer a ciertas condiciones.

Siendo gráficas y métricas las propiedades de una figura geométrica, los problemas se dividen en dos clases fundamentales: *gráficos* y *métricos,* según que la propiedad exigida a la figura buscada sea de una u otra clase.

En los PROBLEMAS MÉTRICOS se tenderá principalmente a la medida de las magnitudes geométricas y se llegará a la solución mediante el cálculo, aplicando las fórmulas geométricas que ligan la medida de los elementos de las figuras, solas o combinadas, con otras, obteniéndose así un sistema de ecuaciones que permite hallar las incógnitas buscadas.

Un problema métrico será *determinado,* si traducido a un sistema de ecuaciones (independientes) hay tantas de éstas como incógnitas. Si el número de ecuaciones es mayor que el de incógnitas, el problema *es imposible,* y si es menor, *indeterminado.*

Los PROBLEMAS GRÁFICOS también son traducibles a ecuaciones, pero dentro de la geometría elemental casi todos ellos se resolverán mediante *construcciones* que nos den *dibujada* la figura pedida.

Un problema gráfico será *determinado* cuando existen un *número finito* de figuras geométricas que satisfacen al problema; *indeterminado,* si existen infinitas, e *imposible,* si no existe ninguna.

Para llegar a la demostración de un teorema o a la resolución de un problema, existen dos métodos lógicos fundamentales, el *analítico* y el *sintético* (análisis y síntesis).

112. **Método analítico o reductivo.** — El método analítico aplicado al *problema gráfico* toma la forma siguiente: se supone el problema resuelto, se descubren las relaciones que ligan las incógnitas con los datos, y siguiéndolas después en un orden inverso, se llega al fin deseado.

El método analítico es el que se usa en la investigación de verdades desconocidas. Este método también se llama *reductivo* porque reduce el problema a otro más sencillo que ya se sabe resolver.

113. **Método sintético.** — Este procedimiento es inverso del anterior; aquí se parte de una propiedad cierta ya conocida para deducir de ella otra nueva y cierta, de la que siguiendo el mismo método se llegue al fin a la propiedad que se desea demostrar o al problema que se quiere resolver.

El método sintético es el clásico en el desarrollo de la Geometría.

114. **Discusión de un problema.** — Una vez resuelto un problema se debe estudiar cómo *varían la solución o soluciones del problema al variar los datos*. Este estudio se llama *discusión* del problema y es necesario si se desea resolverlo *con toda generalidad*, es decir, conocer la naturaleza de la solución en todos los casos posibles.

115. **Ejemplos de aplicación del método analítico.** — PROBLEMA 1. *Construir un trapecio dados los cuatro lados.*

ANÁLISIS. Supongamos el problema resuelto, y sea A B C D el trapecio pedido (fig. 6). Se ve que si tomamos por base de un triángulo el segmento E B, diferencia de las bases del trapecio, y los otros dos lados del triángulo son los lados no paralelos del trapecio, el triángulo queda determinado y al mismo tiempo también queda determinado el trapecio pedido.

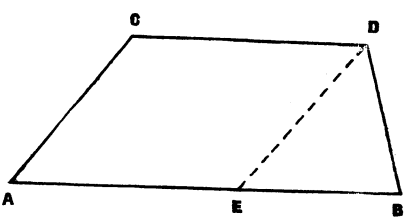


FIG. 6

Como vemos, el problema se ha reducido a la construcción de un triángulo, dados los tres lados.

116. **Problema 2.** — *Trazar por un punto dado una tangente a una circunferencia.* 1.° EL PUNTO SE DA EN LA CIRCUNFERENCIA.

ANÁLISIS. Ese punto será el de contacto, y, por consiguiente, el problema se reduce a trazar por el punto dado la perpendicular al radio del mismo.

El problema es siempre posible y tiene una solución.

2.° EL PUNTO DADO ES EXTERIOR A LA CIRCUNFERENCIA (fig. 7).

ANÁLISIS. Sea ésta la de centro O, y A el punto; supongamos el problema resuelto, y sea B A la tangente pedida.

Se observa que siendo recto el ángulo O B A, el punto B estará en la semicircunferencia descrita sobre O A como diámetro; y puesto que ha de estar también en la dada, será la intersección de ambas.

Construcción: Se traza la circunferencia de radio igual a la mitad de A O y se une A con los puntos de intersección de esta circunferencia con la dada.

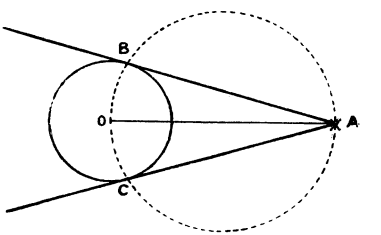


FIG. 7

Discusión: Por un punto exterior a una circunferencia se le puede trazar dos tangentes, porque la circunferencia A B O C sólo corta a la circunferencia O en dos puntos.

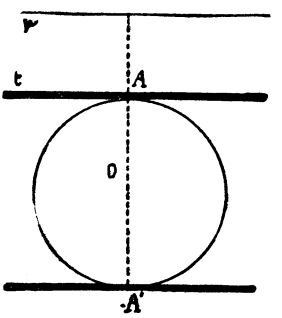


FIG. 8

CASO PARTICULAR: *Trazar a una circunferencia una tangente paralela a una recta dada* (fig. 8).

Sean r y O la recta y la circunferencia dadas.

Las tangentes t y t' buscadas serán perpendiculares al diámetro perpendicular a la recta dada. Por tanto, la construcción será:

Se traza el diámetro A A' perpendicular a *r*, que cortará a la circunferencia en los puntos A y A'. Las tangentes *t* y *t'* a la circunferencia en A y A' resuelven el problema. Este problema admite siempre dos soluciones.

117. **Problema 3.** — *Trazar las tangentes comunes a dos circunferencias.*

Una tangente común se llama *exterior* o *interior*, según que deje a ambos círculos en el mismo o en distinto semiplano.

I. *Tangente común exterior.*

1.° *Análisis o estudio de la figura.* — Sean dos circunferencias O y O′ (fig. 9), de radios R y R′ (R > R′), y A A′ una tangente común exterior.

Los radios O A y O′ A′ perpendiculares a A A′ son paralelos. Tracemos por O′ la perpendicular a A, que la corta en B. El cuadrilá-

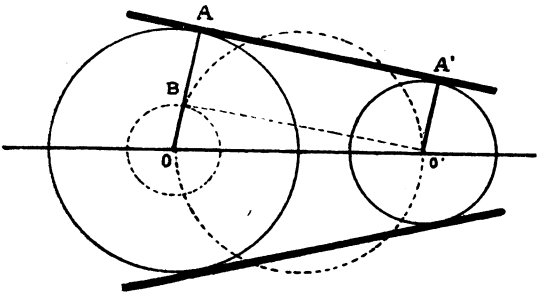


FIG. 9

tero A A′ O′ B es rectángulo, ya que tiene tres ángulos rectos; se tiene, pues:

$$O B = O A - A B = O A - O' A' = R - R'$$

y la circunferencia de centro O y radio R — R′ será tangente a O′ B en B.

2.° *Construcción.* — Se construye la circunferencia de centro O y radio R — R′. Desde O′ se traza la tangente a esta circunferencia; sea O′ B. Se traza O B, que corta en A a la circunferencia O; en A se traza la perpendicular a O A; así se obtiene la tangente pedida. El problema admite una segunda solución: la tangente C C′ simétrica de A A′ respecto a O O′.

3.° *Discusión.* — Para que desde O′ se puedan trazar tangentes a la circunferencia de centro O y radio R — R′, es necesario y suficiente que O′ sea exterior a esta circunferencia; o sea:

$$O O' > R - R'.$$

Esta condición equivale a decir que las circunferencias dadas tendrán dos tangentes comunes exteriores si son exteriores, o secantes, o tangentes exteriores. ¿Cuándo hay una o ninguna?

II. *Tangente común interior.*

Mediante la figura 10, estudie el alumno el modo de construir las tangentes comunes interiores, y vea cuándo hay dos, una o ninguna.

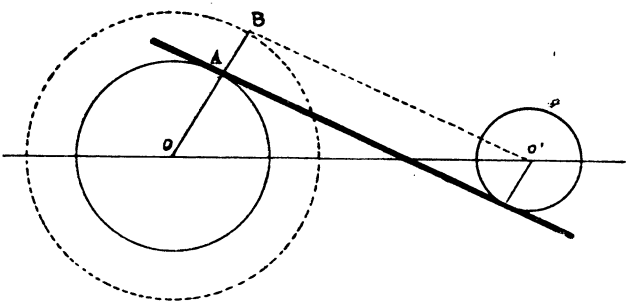


FIG. 10

Como se ve, el trazado de las tangentes comunes a dos circunferencias se reduce al trazado de las tangentes desde un punto a una circunferencia.

118. **Problema 4.** — *Trazar una circunferencia que pase por un punto dado y sea tangente a una recta en un punto de ésta* (fig. 11).

ANÁLISIS: Sea A el punto dado, B C la recta y D el punto de contacto. La circunferencia buscada, por pasar por A y por D, tendrá su centro en la mediatriz de A D, y por ser tangente a B C en D, tendrá su centro en la perpendicular en este punto a la recta B C. Luego el centro es el punto O, en donde se cortan ambas perpendiculares.

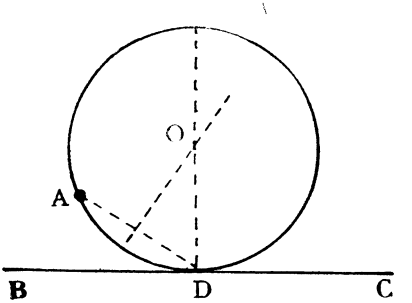


FIG. 11

Este problema tendrá siempre una solución, excepto en el caso en que el punto A se encuentre sobre la recta, en cuyo caso la circunferencia se convierte en dicha recta.

119. **El método de lugares geométricos.** — Uno de los procedimientos más fecundos usados en Geometría es el llamado de *intersección de lugares geométricos.*

Lugar geométrico de los puntos que gozan de una determinada propiedad es una línea cuyos puntos gozan todos de dicha propiedad, y solamente ellos.

Muchas veces los problemas se reducen, en última instancia, a hallar un punto que reúna ciertas condiciones, y que puede obtenerse por intersección de dos líneas que deben contenerlo. Para determinar dichas líneas se prescinde primero de una condición; las restantes determinarán, no el punto pedido, sino una infinidad de ellos, es decir una línea que cumplirá con las condiciones que se han tenido en cuenta. Dejando después aparte otra condición distinta, se obtendrá una segunda línea, otro lugar geométrico, que deberá contener también el punto que se busca y, por consiguiente, la intersección de dichos dos lugares será la solución del problema.

Como aplicación de este método basta que se recuerde cómo se determina el centro de la circunferencia que pasa por tres puntos dados.

Como este método exige el conocimiento de los lugares geométricos que expresan ciertas propiedades vamos a recordarlos.

120. **Lugares geométricos fundamentales en la resolución de problemas elementales.** — Los *lugares geométricos de puntos* se clasifican en dos grupos, los que resultan compuestos de rectas o segmentos de rectas y los compuestos de circunferencias o arcos de circunferencia.

121. **Lugares geométricos compuestos de rectas o de segmentos de rectas.**

1. *El lugar geométrico de los puntos que distan de una recta dada una distancia, r, es el conjunto de dos paralelas a ella a dicha distancia.*

2. *El lugar geométrico de los puntos equidistantes de:*

a) Dos puntos dados A y B, es la mediatriz de A B.

b) Dos rectas dadas r_1 y r_2 secantes, es el conjunto de las dos bisectrices de los ángulos r_1 r_2.

c) Dos rectas dadas r_1 y r_2 paralelas, es la paralela media.

3. *El lugar geométrico de los puntos que dividen en una razón dada los segmentos que unen un punto fijo P con otro variable sobre una recta que no pasa por P, es otra recta paralela a ella* (figura 12).

4. *El lugar geométrico de los puntos tales que la razón de sus distancias a dos rectas dadas es una constante* $\frac{p}{q}$, *está constituído por dos rectas concurrentes con aquéllas.*

En efecto, sean r y r′ (fig. 13) las rectas dadas. Si un punto P tiene la propiedad buscada, lo mismo ocurre a todos los puntos de O P; por ejemplo, para P′ se tiene:

$$\frac{OP}{OP'} = \frac{AP}{A'P'} = \frac{BP}{B'P'} \quad o \quad \frac{AP}{BP} = \frac{A'P'}{B'P'}.$$

Para determinar la recta O P basta conocer uno de los puntos P, que puede hallarse haciendo uso del lugar geométrico 1.

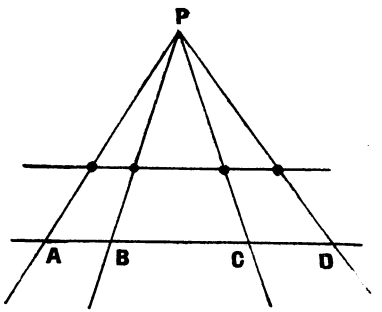


FIG. 12

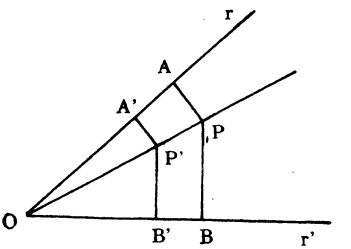


FIG. 13

Existe otra recta, que completa la solución del problema, situada en el ángulo suplementario del A O B.

La bisectriz como lugar geométrico es un caso particular cuando $\frac{p}{q} = 1$.

122. **Lugares de puntos compuestos de circunferencias o arcos de circunferencias.**

5. *El lugar geométrico de los puntos que distan de un punto dado O (centro) una distancia dada r (radio) es una circunferencia.*

6. *El lugar geométrico de los puntos desde los cuales se ve un segmento s bajo un ángulo dado* α *son dos arcos de circunferencia capaces de* α *sobre el segmento s.*

Como corolario se tiene:

El lugar de los puntos medios de todas las cuerdas interceptadas por una circunferencia en las rectas que pasan por un punto P de su plano es una circunferencia (o un arco de ella si P es exterior) cuyo diámetro es el segmento que une P con el centro.

7. *El lugar geométrico de los puntos cuya razón de distancias a dos puntos fijos A y B es constante (m : n) es una circunferencia*

cuyo centro está en la recta que los une. Su diámetro L L′ vendrá determinado por los puntos L y L′ armónicamente separados por A y B y cuya razón de distancias a ellos es m : n.

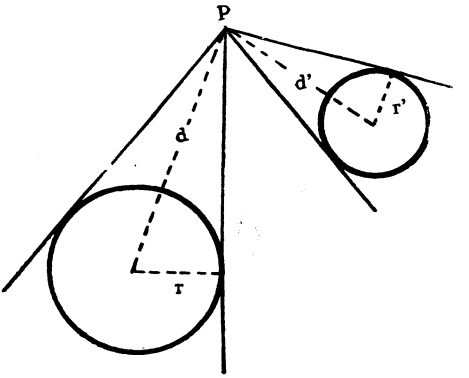


FIG. 14

Como corolario sale:

El lugar geométrico de los puntos P desde los cuales se ven dos circunferencias dadas bajo ángulos respectivamente iguales, es otra circunferencia de centro situado en línea recta con los de las dadas (fig. 14).

En efecto, por ser iguales los ángulos en P, los triángulos son semejantes; luego

$$\frac{d}{.d'} = \frac{r}{r'} = \text{constante.}$$

123. **Problemas de aplicación.** — PROBLEMA 1. — *Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos trazados desde un punto a una recta dada* (fig. 15).

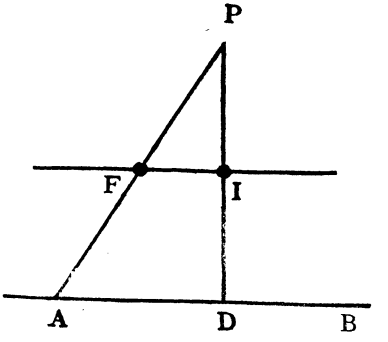


FIG. 15

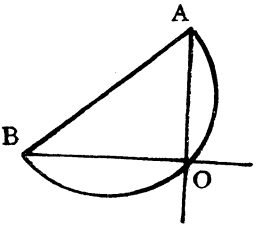


FIG. 16

Solución: Sea A B la recta dada y P el punto; se traza la perpendicular P D a la A B; el punto I, medio de P D, pertenecerá a ese lugar geométrico.

Sea P A otra recta cualquiera; si unimos I con F, punto medio de P A, la recta F I será paralela a A B.

Luego *el lugar geométrico buscado será la paralela a la recta dada A B trazada por el punto medio de la perpendicular P D.*

124. **Problema 2.** — *Hallar el lugar geométrico de los centros de un rombo cuando uno de sus lados queda fijo* (figura 16).

Solución: El ángulo A O B que forman las diagonales del rombo, por ser recto, quedará inscrito en la semicircunferencia de diámetro A B. Luego *el lugar geométrico del vértice O de este ángulo será la semicircunferencia citada.*

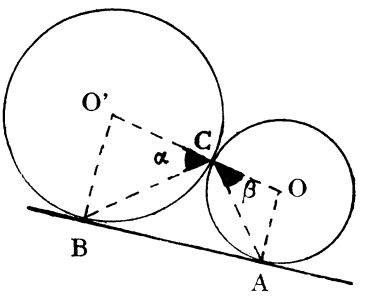


FIG. 17

125. **Problema 3.** — *Hallar el lugar geométrico de los puntos de contacto de las circunferencias tangentes entre sí y a una recta en los puntos A y B respectivamente* (figura 17).

Solución: Los triángulos A O C y B O' C son isósceles y los ángulos O y O' son suplementarios; por consiguiente:

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$
$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

por tanto: $$A\,C\,B = 90^\circ$$

Luego, *el lugar geométrico del punto de contacto C será la semicircunferencia de diámetro A B.*

126. **Problema 4.** — *Los extremos de la hipotenusa de un triángulo rectángulo deslizan sobre los catetos. Hallar el lugar geométrico de su punto medio* (fig. 18).

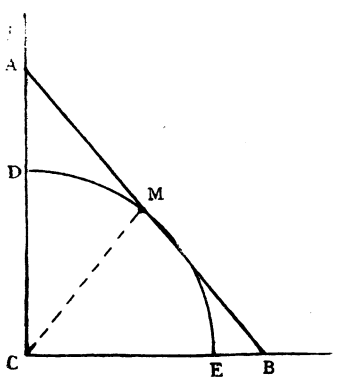


FIG. 18

Solución: Sea A B una de las muchas posiciones que puede tener la hipotenusa móvil. Se une su punto medio M con el vértice C.

La recta C M, como mediana que es de un triángulo rectángulo, respecto de la hipotenusa, será igual a la mitad de ésta, y como la hipotenusa es una longitud constante, también será constante su mitad A M. Luego, el punto M se moverá sobre el arco D M E, descrito desde C con un radio C M igual a la mitad de la hipotenusa.

Por tanto, *el lugar geométrico del punto M es este arco de circunferencia.*

PROBLEMAS

1. La suma de dos números es 324. Añadiendo 26 a cada uno de ellos, uno llega a ser triple que el otro. ¿Cuáles son estos dos números?

2. La diferencia de dos números es 1032. El cociente entero de estos dos números es 13 y el resto de su división 48. ¿Cuáles son estos dos números?

3. Dos ciclistas parten al mismo tiempo de dos ciudades A y B distantes entre sí 200 km. y van al encuentro uno de otro. Se encuentran al cabo de 4 horas. Si el ciclista que sale de A hubiera partido media hora antes que el otro, el encuentro hubiera tenido lugar 3 h. 48 min. después de partir el segundo ciclista. ¿Cuál es la velocidad de cada uno de ellos?

4. Un tren ha empleado 36 segundos en pasar delante de un observador inmóvil. Su longitud es de 300 metros. ¿Cuál es su velocidad? Un segundo tren emplea 24 segundos para cruzar al primero y pasa por delante del observador inmóvil en 18 segundos. Hallar la longitud y la velocidad del segundo tren.

5. Dos ciclistas están separados por una distancia de 54 km. Si fueran a su encuentro recíproco se encontrarían al cabo de 1 hora. Si fueran en el mismo sentido se juntarían al cabo de 9 horas. ¿Cuál es la velocidad de cada ciclista?

6. La suma de dos capitales es 30000 ptas. Uno está colocado al 6 % y el otro al 5 %. La suma de sus intereses anuales es 1620 ptas. ¿Cuál es el valor de cada capital?

7. Las leyes de dos lingotes de oro son respectivamente 0'95 y 0'8. Se les funde juntos añadiendo 3 kg. de oro puro. El lingote así obtenido tiene la ley de 0'906 y pesa 37'5 kg. ¿Cuál es el peso respectivo de los lingotes primitivos?

8. Un tendero compra 100 kg. de café: una parte a 24 ptas. kg.; la otra a 28 ptas. kg. Luego vende todo por 3024 ptas., con un beneficio de 20 % sobre el precio de compra. ¿Cuáles son las cantidades respectivas de cada calidad de café?

9. Dos capitales son tales que el segundo excede en 2300 ptas. a los $\frac{3}{4}$ del primero. Colocándolos al 3'6 %, el primero, durante 7 meses, y el segundo, durante 5 meses, el interés del segundo excede en 207'30 ptas. al interés del primero. Calcular los dos capitales.

10. Dos ciudades A y B distan entre sí 600 km. La tonelada de carbón cuesta 800 ptas. en A y 880 en B, y el transporte cuesta 0'50 ptas. por tonelada y por kilómetro. Hallar el punto C entre A y B en donde el carbón resultará al mismo precio, ya proceda de A, ya proceda de B.

11. Sean sobre un eje X'X dos puntos A y B de abscisas $+3$ y -2. Determinar la abscisa X del punto M tal que $\frac{M'A}{M'B} = \frac{3}{5}$. Determinar la abscisa del punto M' tal que:

$$\frac{M'A}{M'B} = -\frac{3}{5}.$$

12. Calcular el lado del cuadrado inscrito en un triángulo A B C cuya base B C mide 30 cm., y cuya altura A H mide 20 cm., sabiendo que un lado del cuadrado se apoya en la base del triángulo.

13. Inscribir en un triángulo A B C de base B C = 15 cm., de altura A H = 10 cm., un rectángulo M N P Q, cuyo lado P Q se apoya sobre B C, sabiendo que el perímetro de este rectángulo vale 22 cm.

El mismo problema cuando el perímetro vale 50 cm.

14. Los lados de un triángulo A B C son a = 18 cm., b = 15 cm., c = 21 centímetros. Hallar un punto M sobre A B tal que trazando por M la paralela a B C que corta a A C en N, el perímetro del trapecio B M N C mida 48 centímetros.

El mismo problema cuando el perímetro vale 72 cm.

15. Los lados de un triángulo A B C son a = 15 cm., b = 12 cm., c = 8 centímetros. Por un punto M de B C se trazan las paralelas M D y M E a los otros dos lados. Determinar M para que se tenga M D + M E = 9 cm.

16. Sea un ángulo recto X O Y. Sobre el lado O X se toman dos puntos A y M tales que O A = 2 y O M = 3. Sobre el lado O y se toman dos puntos B y N tales que O B = 4 y O N = 3. Las rectas A B y M N se cortan en L. ¿Cuáles son las distancias de L a los dos lados del ángulo X O Y?

17. Los lados de un triángulo A B C son a = 18 cm., b = 15 cm., c = 21 centímetros. Calcular la longitud de los segmentos determinados sobre B C por la bisectriz interior y por la bisectriz exterior de $\widehat{BAC}$.

18. Se da los números 3, 5, 13 y 19. ¿Qué número x hay que sumarles para que formen proporción, en este mismo orden?

19. Hallar el lado de un triángulo equilátero sabiendo que si el lado disminuye en a, el área del triángulo disminuye en b^2; siendo a y b números dados.

20. Sean tres puntos A, B, C en línea recta. Determinar sobre la recta un punto M tal que:

$$\overline{MA}^2 = \overline{MB} \cdot \overline{MC}.$$

21. Sea una circunferencia de centro O y un punto A sobre esta circunferencia. Se da O A = a. Hallar en la prolongación de O A un punto M tal que si desde M se traza una tangente M T a la circunferencia y desde T la perpendicular T P sobre O A, se tenga P A = m, siendo m una longitud dada.

22. Se da un triángulo A B C, la base B C = a, y la altura correspondiente A H = h. Calcular el lado del cuadrado inscrito en el triángulo, sabiendo que uno de los dos lados del cuadrado se apoya sobre B C y que los otros dos vértices están sobre A B y sobre A C. Construcción geométrica de este cuadrado.

23. Se da un trapecio cuyas bases son A B = a, B C = b, y la altura h. Hallar las alturas de los triángulos obtenidos prolongando los dos lados no paralelos del trapecio.

24. Se dan los tres lados a, b, c, de un triángulo. ¿A qué distancia de la base hay que trazar una paralela a esta base para que el trapecio obtenido tenga un perímetro de longitud dada 2 p?

25. Se da un triángulo A B C. Se designa por a, b, c, las medidas de las longitudes de estos lados y por S su área.

Determinar sobre la base B C, entre B y C, un punto M tal que la suma de sus distancias a los lados A B y A C sea igual a una longitud dada m.

26. Se da los lados a, b, de un rectángulo. Calcular los lados de un segundo rectángulo semejante al primero, sabiendo que la suma de sus lados es igual a una longitud dada k.

27. En una circunferencia de radio dado a, inscribir un rectángulo de perímetro dado.

28. Sea un triángulo A B C rectángulo en A. Sobre el lado A C se toma un punto variable M sujeto a permanecer entre A y C. Pongamos A M $= x$. Determinar x de modo que:

$$\overline{M\,B}^2 = A\,C \;.\; M\,C.$$

29. Un cilindro y un tronco de cono de revolución tienen una base común y la misma altura. Determinar la razón de los radios de las bases del tronco de cono para que el volumen de este tronco sea la mitad del volumen del cilindro.

30. ¿Cuál debe ser el radio de un círculo para que el área del cuadrado inscrito sea igual a un número dado?

31. Se da un semicírculo de radio R. Hallar sobre el diámetro A B un punto C tal que los semicírculos de diámetros A C y B C, interiores al semicírculo dado, limiten con este círculo un área equivalente a la de otro círculo de radio a.

32. Dado un triángulo rectángulo A B C, hallar sobre el lado A B del ángulo recto A, un punto M tal que:

$$\overline{A\,M}^2 + \overline{M\,B}^2 + \overline{M\,C}^2 = k^2$$

siendo k una longitud dada.

33. En una circunferencia de radio R, se inscribe un triángulo isósceles A B C, de base B C. Determinar la altura A H de este triángulo de modo que:

$$A\,B \;.\; A\,C + \overline{B\,C}^2 = k$$

siendo k una longitud dada.

17

Relaciones métricas en un triángulo oblicuángulo

127. **Valor del lado opuesto a un ángulo agudo.** — En todo triángulo *el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.*

Sea el ángulo agudo A en el triángulo B A C, y sea c_1 la proyección de *c* sobre *b*. En el triángulo rectángulo B D C se tiene (fig. 19):

$$a^2 = h^2 + (b - c_1)^2 = h^2 + b^2 + c_1^2 - 2\,b\,c_1 = b^2 + (h^2 + c_1^2) - 2\,b\,c_1$$

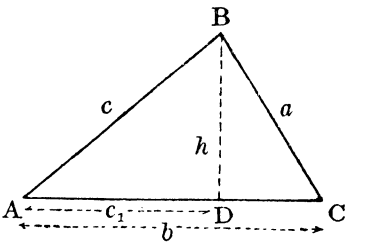


FIG. 19

y ya que en el triángulo rectángulo A B C se verifica que:

$$c^2 = h^2 + c_1^2$$

será:

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c_1} \qquad (1)$$

Ejemplo. — *Los lados de un triángulo miden* $c = 50$ *dm.,* $b = 100$ *dm.,* $a = 60$ *dm. Hallar las proyecciones de* c *y* a *sobre* b.

Solución: En virtud de la fórmula (1):

$$60^2 = 100^2 + 50^2 - 2\,.\,100\,.\,c_1$$

de donde:

$$c_1 = \frac{100^2 + 50^2 - 60^2}{200} = \mathbf{44'5\ dm.}$$

y por tanto:

$$a_1 = 100 - 44'5 = \mathbf{55'5\ dm.}$$

128. **Valor del lado opuesto a un ángulo obtuso.** — En todo triángulo, *el cuadrado del lado opuesto a un ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, más el doble del producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él* (fig. 20).

Sea el ángulo obtuso A en el triángulo B A C, y sea c_1 la proyección de c sobre b prolongado. En el triángulo rectángulo B D C se tiene:

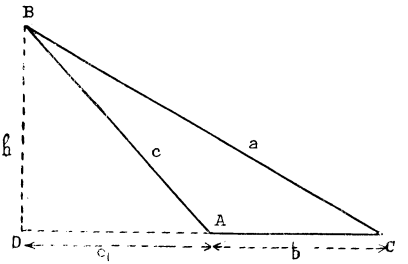


FIG. 20

$$a^2 = h^2 + (b + c_1)^2 = h^2 + b^2 + c_1^2 + 2\,b\,c_1 = b^2 + (c_1^2 + h^2) + 2\,b\,c_1$$

o sea:

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 + 2\,b\,c_1} \qquad (2)$$

129. **Corolario.** — De los dos teoremas anteriores y del teorema de Pitágoras se deduce que, según sea *obtuso, recto o agudo un ángulo de un triángulo, el cuadrado del lado opuesto es mayor, igual o menor que la suma de los cuadrados de los otros dos.*

Recíprocamente: Según sea el cuadrado de un lado de un triángulo mayor, igual o menor que la suma de los cuadrados de los otros dos, el ángulo opuesto es obtuso, recto o agudo.

Ejemplos. — 1.° El triángulo cuyos lados miden 27, 36 y 45 dm. es rectángulo, porque el cuadrado del lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados:

$$27^2 + 36^2 = 729 + 1296 = 2025 = 45^2.$$

2.° El triángulo cuyos lados miden 3, 5 y 7 cm. es obtusángulo, porque la suma de los cuadrados de los dos lados menores es menor que el cuadrado del mayor:

$$3^2 + 5^2 = 9 + 25 = 34 < 7^2.$$

3.° El triángulo en que $a = 7$, $b = 8$, $c = 10$, es acutángulo, pues:

$$7^2 + 8^2 = 49 + 64 = 113 > 10^2.$$

130. **Suma de los cuadrados de dos lados.** — En todo triángulo, *la suma de los cuadrados de dos lados es igual al duplo del cuadrado de la mediana relativa al tercer lado, más la mitad del cuadrado de este lado.*

En el triángulo A B C (fig. 21) m_c es la mediana del lado c, y p su proyección sobre c.

Por ser recto el ángulo D, el $\widehat{CFD}$ será agudo y el $\widehat{CFA}$ será obtuso. Luego en el triángulo obtusángulo A F C se tiene:

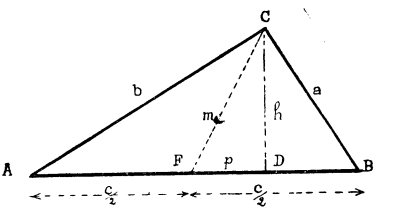


FIG. 21

$$b^2 = m_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + 2\,\frac{c}{2}\,p \qquad (3)$$

Y en el triángulo acutángulo B F C se tiene:

$$a^2 = m_c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2\,\frac{c}{2}\,p \qquad (4)$$

Sumando las expresiones (3) y (4) resulta:

$$a^2 + b^2 = 2\,m_c^2 + 2\,\frac{c^2}{4} \quad \text{o sea:} \quad \mathbf{a^2 + b^2 = 2\,m_c^2 + \frac{c^2}{2}} \qquad (5)$$

Esta fórmula nos permite calcular la mediana en función de los tres lados.

131. **Cálculo de medianas.** — Se trata de expresar la longitud de la mediana m_c relativa al lado *c* en función de los tres lados *a, b, c,* del triángulo.

De la fórmula anterior se tiene:

$$a^2 + b^2 = 2\,m_c^2 + \frac{c^2}{2}$$

o sea:

$$m_c^2 = \frac{2\,a^2 + 2\,b^2 - c^2}{4}$$

de donde:

$$\mathbf{m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2\,a^2 + 2\,b^2 - c^2}}$$

y análogamente:

$$\mathbf{m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2\,b^2 + 2\,c^2 - a^2}};\quad \mathbf{m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2\,a^2 + 2\,c^2 - b^2}}.$$

132. **Diferencia de los cuadrados de dos lados.** — En todo triángulo, *la diferencia de los cuadrados de dos lados es igual al doble producto del tercer lado por la proyección de su mediana sobre él.*

Restando las expresiones (3) y (4) se obtiene:

$$b^2 - a^2 = 2\,\frac{c}{2}\,p + 2\,\frac{c}{2}\,p = c\,p + c\,p$$

o sea:

$$b^2 - a^2 = 2\,c\,p \qquad (6)$$

Esta fórmula nos permite calcular la proyección de la mediana en función de los tres lados.

133. **Lugares geométricos.** — 1.° *El lugar geométrico de los puntos de un plano, tales que la suma de los cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos A y B es constante, es una circunferencia cuyo centro es el punto medio E del segmento A B.*

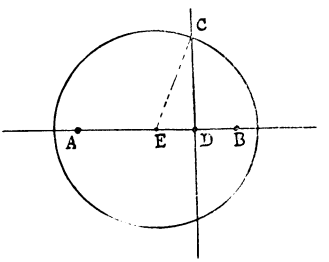


FIG. 22

En efecto, si C (fig. 22) es un punto del lugar, será:

$$\overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 = 2\,\overline{CE}^2 + \frac{\overline{AB}^2}{2}.$$

Como $\overline{AB}^2$ es constante, para que lo sea el primer miembro, lo ha de ser también $\overline{CE}$.

Luego los puntos C del lugar, que distan una longitud $\overline{CE}$ constante del punto medio E del segmento A B, están en una circunferencia de centro E y radio $\overline{CE}$.

2.° *El lugar geométrico de los puntos de un plano, tales que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos A y B es constante, es una recta perpendicular a A B.*

En efecto, si C (fig. 22) es un punto del lugar, será:

$$\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = 2\,\overline{AB}\,.\,\overline{ED}.$$

Como $\overline{AB}$ es constante, para que lo sea el primer miembro, lo ha de ser $\overline{ED}$.

Por tanto, para que la mediana E C dé una proyección p = E D constante, todos los puntos C deben estar sobre la recta D C perpendicular a B A en un punto D.

EJERCICIOS

1. Determinar con los lados indicados si los triángulos son acutángulos, rectángulos u obtusángulos:

1.°	6,	8,	9.	4.°	9,	40,	42.
2.°	6,	8,	10.	5.°	20,	48,	52.
3.°	6,	8,	11.	6.°	13,	84,	85.

2. Si el lado opuesto a un ángulo obtuso es b, y c_1 es la proyección de c sobre a (fig. 23) hallar a_1 y c_1 cuando a, b, c, son, respectivamente:

1.° 5, 15, 12.
2.° 6, 12, 8.
3.° 7, 11, 8.

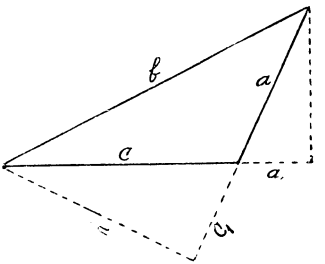


FIG. 23

3. Hallar las longitudes de las tres medianas en un triángulo cuyos lados miden 20 m. 16 m. y 12 m.

4. Los lados de un triángulo miden 18 m., 16 m. y 14 m. Hallar la longitud de la mediana relativa al lado de 16 m.

5. Los lados de un triángulo miden 6, 5 y 4 dm. respectivamente. Hallar la longitud de la mediana relativa al lado menor.

6. Los lados de un triángulo miden 4, 6 y 8 dm. Hallar la mediana relativa a cada lado.

7. En un triángulo cuyos lados miden 12, 5 y 13 m. hallar la mediana relativa al lado de 13 m.

8. Los lados de un triángulo son 8, 6 y 10 cm. Hallar la proyección de la mediana relativa al lado de 6 cm., sobre el mismo.

9. Los lados de un triángulo son 12, 5 y 13 mm. Hallar la proyección de la mediana relativa al lado de 12 mm., sobre el mismo.

10. Hallar b cuando $a = 12$ mm. $c = 10$ mm. y la proyección de c sobre a vale 9 mm. $\widehat{B} < 90°$.

11. Hallar b cuando $a = 12$ m., $c = 10$ m. y la proyección de a sobre c vale 5 m.; $\widehat{B} < 90°$.

12. Hallar c cuando $a = 12$ m., $b = 16$ m. y la proyección de c sobre a vale 8 m.; $\widehat{B} < 90°$.

13. Hallar b si $a = 20$ dm., $c = 15$ dm. y $\widehat{B} = 60°$.

14. Hallar b si $a = 12$ cm., $c = 8$ cm. y $\widehat{B} = 30°$.

15. Dos lados de un triángulo miden 15 y 21 m., respectivamente; la proyección del tercero sobre el segundo es de 13 m. Calcular el tercer lado y la altura correspondiente al segundo.

16. Calcular las medianas de un triángulo cuyos lados miden 40, 45 y 55 milímetros.

17. Los lados de un triángulo rectángulo miden $b = 6$ dm., $c = 8$ dm., $a = 10$ dm. Calcular m_a.

18. Siendo las medidas de dos lados de un triángulo $b = 20$ cm. y $c = 24$ cm. y la proyección de a sobre c 12 cm., hallar la proyección de c sobre a.

19. Los lados de un paralelogramo miden 9 y 16 dm. respectivamente y una de las diagonales mide 20 dm. Averiguar la longitud de la otra diagonal.

Indicación: La diagonal pedida es el doble de la mediana del triángulo formado por los lados y la otra diagonal.

20. Los lados de un paralelogramo miden 10'5 cm. y 14'7 cm. respectivamente y una de las diagonales es 16'8 cm. Hallar la longitud de la otra diagonal.

21. Los lados de un triángulo son 10 mm., 8 mm. y 9 mm. Hallar las longitudes de las tres medianas y la distancia desde el punto de concurso de las mismas a cada vértice.

22. El perímetro de un paralelogramo es igual a 14 m. y sus diagonales miden 4 m. y 6 m. Hallar las longitudes de los lados contiguos.

18

Relaciones métricas en la circunferencia y en los polígonos regulares

134. **Teorema fundamental de la potencia de un punto.** — Si por un punto del plano de una circunferencia se trazan secantes a la misma, *el producto de los segmentos determinados por dicho punto y los de intersección con la circunferencia, es constante para cada secante.*

Primer caso. El punto P es exterior a la circunferencia (figura 24). Los triángulos P A B′ y P A′ B son semejantes por tener P común y $\overset{\frown}{B'AP} = \overset{\frown}{BA'P}$, por inscritos que abarcan el mismo arco.

Luego:
$$\frac{PA}{PB'} = \frac{PA'}{PB}.$$

De donde:
$$PA \cdot PB = PB' \cdot PA'.$$

Segundo caso. El punto P es interior a la circunferencia (fig. 25). Los triángulos P A A′ y P B B′ son semejantes, por tener igual el

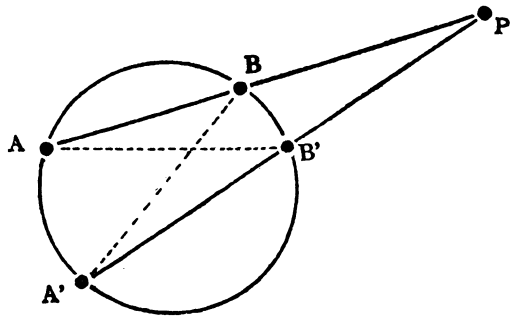


FIG. 24

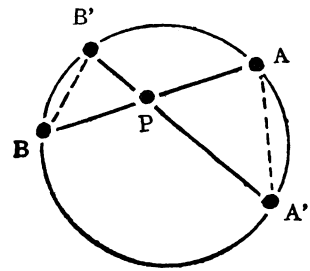


FIG. 25

ángulo en P y, además, $\overset{\frown}{PA'A} = \overset{\frown}{PBB'}$, por inscritos que abarcan el mismo arco.

Luego:
$$\frac{PA}{PA'} = \frac{PB'}{PB}.$$

De donde:

$$P\,A \,.\, P\,B = P\,A' \,.\, P\,B'.$$

Problema. — *Si en la figura 24 es P A = 36 dm., P B = 15 dm. A' B' = 12 dm. hallar P A' y P B'.*

Solución: Llamando P A' = y, P B' = x, se tiene:

$$\begin{cases} y - x = 12 \\ y \,.\, x = 36 \,.\, 15 = 540. \end{cases}$$

Resolviendo este sistema se encuentra:

$$y = P\,A' = \mathbf{30\ dm.}$$
$$x = P\,B' = \mathbf{18\ dm.}$$

135. **Potencia.** — *Se llama potencia p de un punto P respecto de una circunferencia al producto* P A . P B de los segmentos determinados en una secante cualquiera trazada desde P, por este punto y las intersecciones con la circunferencia.

136. **Expresión analítica de la potencia de un punto.** — Cuando el punto es exterior, los dos segmentos P A y P B son del mismo sentido y su producto se considera *positivo*. Si el punto es interior, P A y P B son de sentido contrario, y su producto es *negativo*.

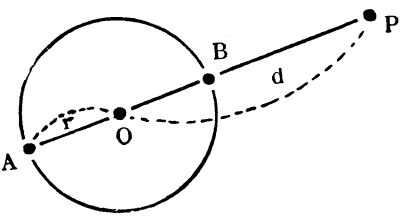


FIG. 26

Primer caso. El punto P es exterior a la circunferencia (fig. 26). Según la definición anterior podemos tomar como secante especial el diámetro P O. Llamando *d* a la distancia P O y *r* al radio O A = = O B, se tiene:

$$P\,A = d + r$$
$$P\,B = d - r.$$

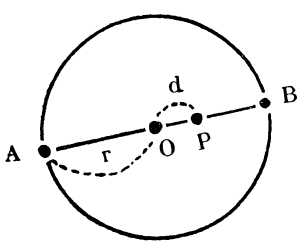


FIG. 27

Luego el valor *p* de la potencia será:

$$p = P\,A \,.\, P\,B = (d + r)\,(d - r) = d^2 - r^2.$$

Segundo caso. El punto P es interior a la circunferencia (fig. 27).

Procediendo como en el caso anterior, resulta:

$$P\,A = r + d = d + r$$
$$B\,P = r - d.$$

Luego:

$$p = P\,A \cdot P\,B = P\,A \cdot (-\,B\,P) = (d + r)\,(d - r) = d^2 - r^2.$$

Se ve que en todo caso la potencia vale:

$$\mathbf{p = d^2 - r^2}$$

siendo *positiva* cuando el punto P es *exterior* por ser $d > r$; *negativa* cuando el punto es *interior* por ser $d < r$, y *nula* cuando el punto pertenece a la circunferencia por ser $d = r$.

137. **Potencia de un punto exterior en función de la tangente.** — *La potencia de un punto exterior es igual al cuadrado de la longitud de la tangente trazada por él.*

Se llama *longitud de la tangente* a la del segmento P C limitado entre el punto P y el de contacto.

Sea el punto exterior P desde el cual trazamos una secante P A y una tangente P C (fig. 28).

En el triángulo P O C se tiene:

$$p = d^2 - r^2 = \overline{P\,C}^2 \qquad \text{c. q. d.}$$

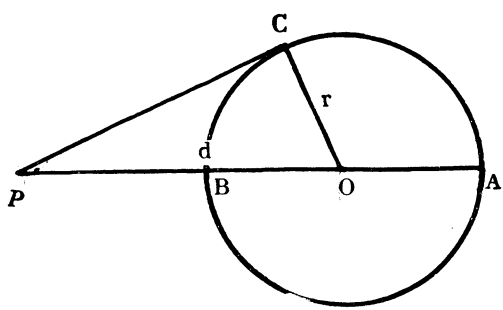


FIG. 28

138. **Eje radical de dos circunferencias.** — *Se llama* eje radical *de dos circunferencias coplanarias el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen igual potencia respecto de las dos circunferencias.*

El eje radical de dos circunferencias es una recta perpendicular a la línea de los centros.

En efecto: Sea P un punto que tiene igual potencia respecto de las dos circunferencias O y O′ de radios r y r′, respectivamente (fig. 29); sean *d* y *d′* sus distancias a O y O′; se verificará:

$$d^2 - r^2 = d'^2 - r'^2$$

o sea:

$$d^2 - d'^2 = r^2 - r'^2.$$

El segundo miembro $r^2 - r'^2$ es una constante, cualquiera que sea el punto del lugar. Luego, según el núm. 133, 2.°, este lugar es una recta perpendicular a O O'.

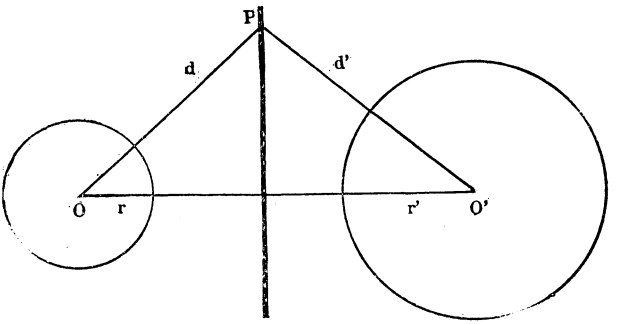


FIG. 29

139. **Determinación del eje radical de dos circunferencias.** — 1.° *Si las dos circunferencias son exteriores* (fig. 30 a), se trazan las tangentes comunes exteriores; los puntos medios P y P' de las mismas tienen igual potencia respecto de ambas circunferencias (número 137). La recta P P' será, por tanto, el eje radical.

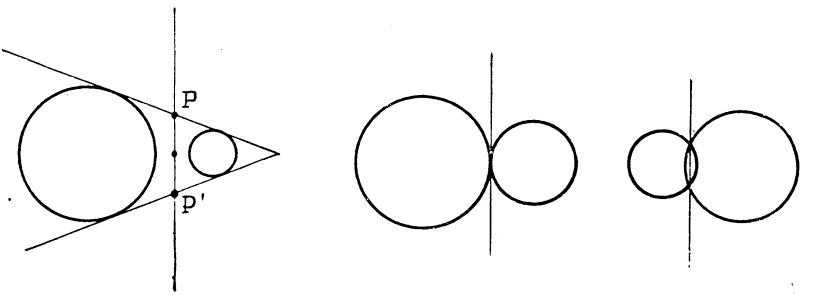


FIG. 30

2.° *Si son tangentes* (fig. 30 b), la tangente común es el eje radical, ya que el punto común de contacto tiene potencia nula respecto de las dos circunferencias, y la tangente es perpendicular a la línea de los centros.

3.° *Si son secantes,* la cuerda común es el eje radical, pues los dos puntos comunes a ambas circunferencias tienen potencia nula respecto de ambas (fig. 30, c).

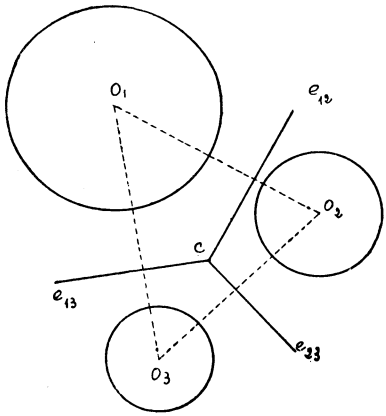


FIG. 31

140. **Centro radical de tres circunferencias.** (fig. 31).—Sean las tres circunferencias O_1, O_2 y O_3; llamemos e_{12} al eje radical de las dos primeras; e_{23}, al de las dos últimas, y sea C el punto de intersección de ambos; dicho punto tiene, por tanto, igual potencia respecto de las tres circunferencias; luego pertenecerá al eje radical e_{13} de O_1 y O_3. Quiere decir que los tres ejes radicales se encuentran en un mismo punto C llamado *centro radical.*

Centro radical de tres circunferencias es el punto que tiene igual potencia respecto de ellas.

141. **Construcción de polígonos regulares inscritos.** — Si una circunferencia está dividida en un número cualquiera *n* de partes iguales y unimos los puntos de división consecutivos, se obtiene el polígono regular convexo inscrito correspondiente; pero si unimos estos puntos de 2 en 2, ó de 3 en 3, ..., de modo que cada cuerda subtienda 2 ó 3 ó 4, ..., divisiones, se puede recorrer la circunferencia varias veces sucesivas; pero siempre se llega al punto de partida (fig. 32). En general, se forma un *polígono no convexo, cuyos lados son iguales, lo mismo que sus ángulos,* y se llama *polígono regular estrellado.*

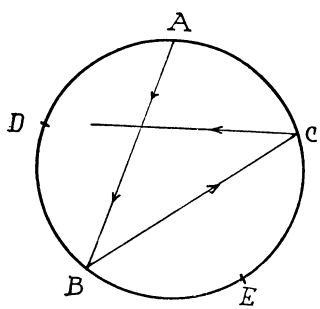


FIG. 32

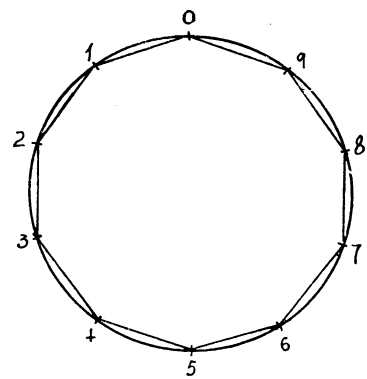


FIG. 33

Género de un polígono es el número de sus lados.

Especie de un polígono es el número de vueltas que se da a la circunferencia desde que se parte de un vértice y recorriendo el contorno del polígono se vuelve al mismo vértice. Así el polígono de la figura 32 es de segunda especie.

142. **Pentágonos y decágonos convexos y estrellados.** — En las cuatro figuras (33 a 36) se ha dividido la circunferencia en 10 partes iguales y se han unido los puntos de división de 1 en 1, de 2 en 2, de 3 en 3, de 4 en 4, respectivamente. Se obtienen así el *decágono convexo,* el *pentágono convexo,* el *decágono estrellado* y el *pentágono estrellado.*

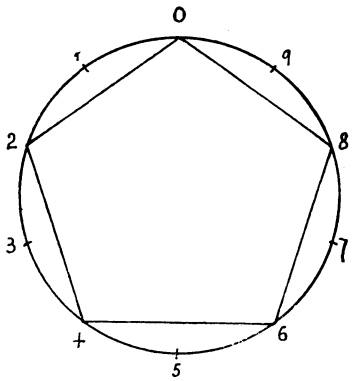


FIG. 34

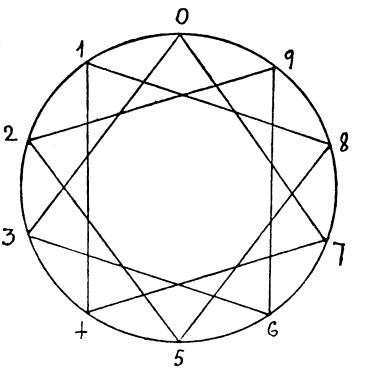


FIG. 35

Al unir de 3 en 3 divisiones, para que se cierre el polígono han de recorrerse un número de divisiones igual al m. c. m. (3, 10) = 30 divisiones. Luego el *género* del polígono será 30 : 3 = 10 lados, y la especie, 30 : 10 = 3 vueltas. Es, pues, un *decágono estrellado de tercera especie.*

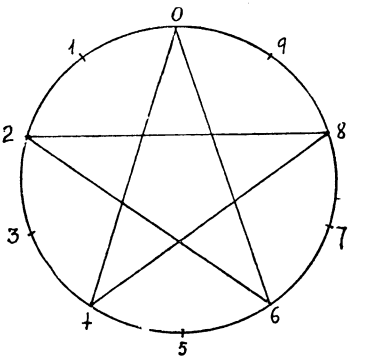


FIG. 36

Al unir de 4 en 4, el número de divisiones que hay que recorrer para que el polígono se cierre es el m. c. m. (4, 10) = 20 divisiones. El *género* del polígono será 20 : 4 = 5 lados, y la especie, 20 : 10 = 2 vueltas. Se trata, por tanto, del *pentágono estrellado de segunda especie.*

143. **División de un segmento en media y extrema razón (división áurea).** — Tratamos en primer lugar de resolver numérica y gráficamente el siguiente problema:

Dado un segmento A B (figura 37), *hallar otros dos segmentos cuya diferencia sea igual a A B y cuyo producto sea igual a* AB^2.

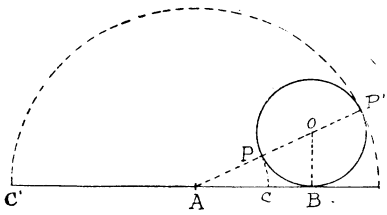


FIG. 37

DETERMINACIÓN GRÁFICA. — En el extremo B (fig. 37) se levanta una perpendicular al segmento A B y se toma sobre ella B O = A B/2. Haciendo centro en O se traza una circunferencia de radio O B, que será tangente a A B. La recta A O corta a esta circunferencia en dos puntos P y P', verificándose que:

$$AP' - AP = PP' = 2OB = AB \qquad (1)$$

$$AP' \cdot AP = \overline{AB}^2 \qquad (2)$$

Esta última relación en virtud del núm. 137.

Por tanto, los segmentos A P' y A P resuelven el problema.

DETERMINACIÓN NUMÉRICA. — Siendo d la medida del segmento A B, resulta:

$$OB = \frac{AB}{2} = \frac{d}{2} = OP = OP'$$

$$AO = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{OB}^2} = \sqrt{d^2 + \frac{d^2}{4}} = \sqrt{\frac{4d^2 + d^2}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{5d^2}{4}} = \frac{d}{2}\sqrt{5} \qquad (3)$$

$$AP = AO - OP = \frac{d}{2}\sqrt{5} - \frac{d}{2} = \frac{d}{2}(\sqrt{5} - 1) \qquad (4)$$

$$AP' = AO + OP = \frac{d}{2}\sqrt{5} + \frac{d}{2} = \frac{d}{2}(\sqrt{5} + 1) \qquad (5)$$

DIVISIÓN ÁUREA. — Si ahora hacemos centro en A y trazamos los arcos P C y P' C', se dice que *los puntos C y C' dividen al segmento A B en media y extrema razón.*

Al segmento A C se le denomina *segmento áureo* del segmento A B.

Dicho segmento áureo tiene la propiedad de *ser media proporcional entre el segmento entero A B y el segmento menor C B.*

En efecto, la igualdad (2) puede escribirse:

$$\frac{AP'}{AB} = \frac{AB}{AP}$$

y aplicando una propiedad de las proporciones:

$$\frac{AP' - AB}{AB} = \frac{AB - AP}{AP}.$$

Pero:

$$AP' - AB = AP' - PP' = AP = AC$$
$$AB - AP = AB - AC = CB.$$

Luego:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CB}{AC} \text{ c. q. d.}$$

144. **Decágonos.** — Existen dos clases de decágonos: el convexo y el estrellado (núm. 142), siendo éste de tercera especie.

Sea $AB = l_{10}$ el lado del primero y $AC = L_{10}$ el del segundo (fig. 38).

De la figura se tiene:

$$\hat{x} = \overset{\wedge}{x'} = \hat{z} = \overset{\wedge}{z'} = \frac{2}{10} \text{ de circunferencia;}$$

$$\overset{\frown}{AOC} = \frac{3}{10} \text{ de circunferencia.}$$

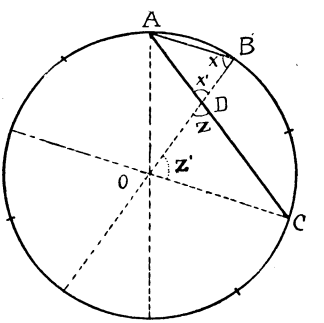


FIG. 38

Por, tanto los triángulos A B C y O C D son isósceles, y:

$$\left.\begin{matrix} AD = AB = l_{10} \\ DC = OC = R \end{matrix}\right\} AC = AD + DC$$

o sea:

$$L_{10} = l_{10} + R$$

de donde:

$$L_{10} - l_{10} = R \qquad (6)$$

Además, los triángulos A O C y A O D son semejantes, por tener sus ángulos respectivamente iguales; luego:

$$\frac{AO}{AD} = \frac{AC}{AO}$$

esto es:

$$\overline{AO}^2 = AD \cdot AC$$

o sea:

$$l_{10} \cdot L_{10} = R^2 \qquad (7)$$

De las ecuaciones (6) y (7) se deduce que: *Los lados de los decágonos son los segmentos que dividen el radio en media y extrema razón* (número 143). Sus valores se obtienen, pues, sustituyendo *d* por R en las fórmulas (4) y (5); son:

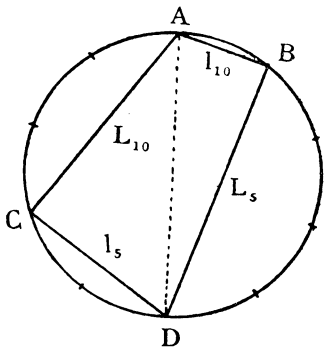


FIG. 39

$$l_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) \qquad (8)$$

$$L_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} + 1) \qquad (9)$$

Conocidos los lados de los decágonos, es fácil hallar los de los pentágonos. En efecto, el lado l_5 del pentágono convexo forma un triángulo rectángulo con L_{10} y el diámetro A D = 2 r (fig. 39). Del mismo modo el lado del pentágono estrellado L_5 forma triángulo rectángulo con l_{10} y A D = 2 r.

EJERCICIOS

1. Si en la figura 40, A E = 4 cm., E B = 5 cm., D E = 7 cm., hallar E C.
2. Si en la figura 40, AE=3'2 dm., AB=7'1 dm., EC=2'6 dm., hallar CD.

En los ejercicios 3, 4 y 5 hay que hallar x y la longitud de cada cuerda:

3. En la figura 40, A E = x — 4, E B = x + 8, D E = x + 3, E C = x — 4.

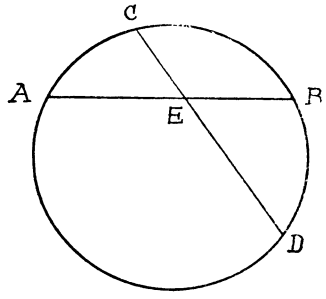


FIG. 40

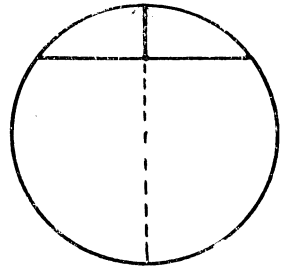


FIG. 41

4. En la figura 40, $AE = x + 2$, $EB = x + 6$, $DE = x - 4$, $EC = x + 18$.

5. En la figura 40, $AE = 2x + 2$, $EB = 3x - 5$, $DE = x + 1$, $EC = x + 5$.

6. El diámetro de una circunferencia mide 18 cm., y por un punto del mismo que dista del centro 6 cm. se traza la perpendicular al diámetro. ¿Qué longitud tiene la cuerda?

7. Por un punto de un diámetro y a 8 cm. del centro se traza una perpendicular al diámetro. Si la cuerda mide 24 cm., hallar la longitud del diámetro.

8. Hallar el diámetro de la circunferencia de la figura 41, si la cuerda mide 30 m. y la flecha 2 m.

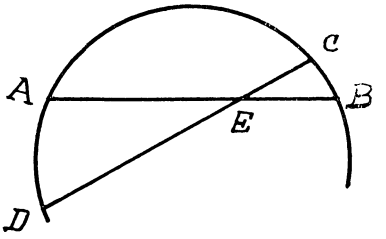


FIG. 42

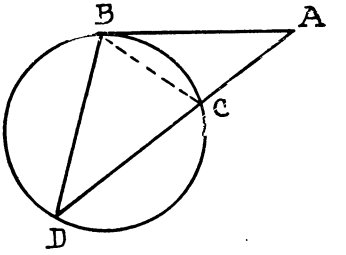


FIG. 43

9. ¿Cómo se sabría si el arco de ferrocarril de la figura 42, pertenece a una circunferencia? ($AE = 166$ m., $EB = 36$ m., $CE = 24$ m., $ED = 249$ m.)

10. Dos cuerdas AB y CD de una circunferencia se cortan en el punto E (figura 42). Sabiendo que $AE = 8$ dm., $BE = 12$ dm. y $CD = 22$ dm., hallar CE y DE.

11. En la figura 43, AB es tangente a la circunferencia; demostrar que $\Delta ABD \sim \Delta ACB$.

12. Si en la figura 43, $CD = 4$ cm., $AC = 6$ cm., hallar AB.

13. Si en la figura 43, $AB = 8$ dm., $CD = 4$ dm., hallar AC.

14. Si en la figura 43, $AB = 7'5$ m., ¿cuál es el producto de las distancias desde A a otros dos cualesquiera de la circunferencia, colineales con A?

15. La potencia de un punto P respecto a una circunferencia, de centro O y radio $r = 15$ cm., es 400 cm.^{2} Hallar OP.

16. ¿A qué distancia del centro de una circunferencia de 13 cm. de radio se encuentran un punto P cuya potencia respecto a ella es: 1.°) -25 cm.^{2}; 2.°) -144 cm.^{2}; 3.°) 315 cm.^{2}

17. Un aeroplano está a 4000 m. de altura sobre el nivel del mar. ¿Cuál es la distancia máxima a que puede ver un barco? (figura 44).

18. Por medio de la potencia del punto M respecto de la circunferencia C, demostrar que las tangentes desde M a la circunferencia son iguales.

19. Desde un punto que dista cinco unidades del centro de una circunferencia se traza una tangente de cuatro unidades. ¿Cuál es la longitud del radio?

20. El vigía de un barco está a 30 m. sobre la superficie del agua. ¿A qué distancia puede ver un objeto flotante?

21. Los centros de dos circunferencias distan entre sí 36 cm.; sus radios miden 13 cm. y 5 cm., respectivamente. ¿A qué distancia de los centros pasará el eje radical?

22. Un punto P dista 25 dm. del centro de una circunferencia de 7 dm. de radio. Calcular la longitud de la tangente trazada desde el punto P a dicha circunferencia.

23. Si en la figura 45, A C = 11 m., A B = 7 m., A D = 6 m., hallar A E.

24. Si en la figura 45, B C = 4 m., A B = 8 m., E D = 5 m., hallar A D.

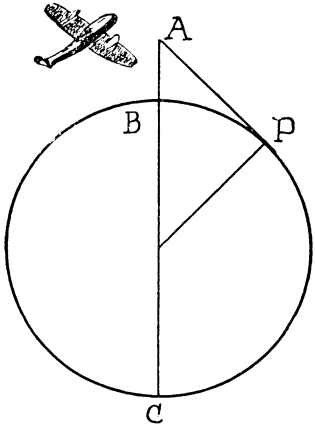


FIG. 44

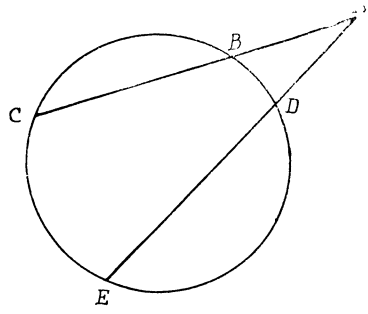


FIG. 45

25. Calcular el radio de una circunferencia, si la tangente trazada desde un punto distante de aquélla 6 cm. es igual al radio.

26. Calcular la potencia de un punto P distante 50 cm. del centro de una circunferencia de 12 dm. de radio.

27. Una cuerda de una circunferencia mide 20 cm. Un punto interior de la misma la divide en dos segmentos de 4 y 16 cm. ¿Cuánto medirá la cuerda perpendicular al diámetro que pasa por ese punto?

28. En una circunferencia de 6 dm. de radio, una secante que pasa por su centro mide 18 dm., desde un punto P hasta el más alejado de los dos en que corta a la circunferencia. ¿Cuánto medirá la tangente trazada desde P?

29. Calcular los segmentos que resultan de dividir áureamente un segmento de 8 cm.

30. Hallar el segmento áureo del segmento $7\sqrt{5}$.

31. El segmento áureo vale $2(\sqrt{5}-1)$. ¿Cuál es el segmento total?

32. Un segmento mide 2 cm. Calcular la diferencia entre el segmento áureo y el segmento menor.

33. Un segmento se ha dividido áureamente. Si el segmento menor vale 3 cm., ¿cuánto valdrá el segmento áureo?

34. Si b es el segmento áureo del segmento a, demostrar que el segmento menor en que queda dividido a es, a su vez, segmento áureo de b.

35. Hallar el área de un decágono regular inscrito en una circunferencia de 8 m. de radio.

19

Funciones y gráficas

145. **Variables y funciones.** — Una *variable* es una magnitud que puede tomar diferentes valores (corrientemente un número infinito de ellos) en el mismo problema. Las variables se designan de ordinario por las últimas letras del abecedario.

Las variadas aplicaciones del cálculo tienen como variables el tiempo, la temperatura, la velocidad, la fuerza, la presión de un flúido, la resistencia del aire y otras muchas magnitudes.

Una variable y *es función de otra x si ambas están relacionadas de tal modo que* y *queda determinada cuando se da un valor a x.*

La variable x, a la cual se le pueden dar valores arbitrarios, se llama *variable independiente.* La variable y, cuyos valores dependen de los que se atribuyen a x, se denomina *variable dependiente o función.*

Ejemplo 1. — El área de un círculo está determinada por su radio, es decir, el área es función del radio.

$$S = \pi r^2.$$

Ejemplo 2. — El tiempo necesario para recorrer 50 Km., con una velocidad constante, es función de la velocidad:

$$t = \frac{50}{v}.$$

Ejemplo 3. — El coste C de un peso P de turrón es proporcional al peso P: supongamos a 25 pesetas el Kg.; será:

$$C = 25\,P.$$

Se acostumbra representar la función por la letra y, y la variable independiente por la letra x. De suerte que las funciones anteriores se escribirán así:

$$y = \pi x^2; \quad y = \frac{50}{x}; \quad y = 25\,x.$$

146. **Coordenadas rectangulares.** — *Ejes de coordenadas rectangulares* son dos rectas que se cortan perpendicularmente. El punto común se llama *origen de coordenadas.*

Así tracemos dos rectas X'X e Y'Y que se corten en ángulo recto en el punto O (fig. 46). Sobre cada una elijamos una unidad de medida y marquemos una escala con el cero en el punto O. Los números positivos están a la derecha sobre la recta horizontal X'X, y hacia arriba sobre la recta vertical Y'Y; los números negativos están a la izquierda sobre X'X, y hacia abajo sobre Y'Y. La recta X'X se llama *eje de abscisas,* y la recta Y'Y *eje de ordenadas.*

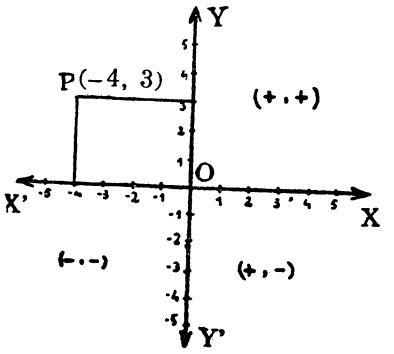


FIG. 46

Tomemos ahora un punto cualquiera P. Su distancia al eje de ordenadas se llama *abscisa* del punto y se designa por *x;* su distancia al eje de abscisas se llama *ordenada* y se designa por *y*. La abscisa y la ordenada se llaman *coordenadas* (más preciso *coordenadas rectangulares)* del punto. El punto P, cuya abscisa es *x* y cuya ordenada es *y,* se designa por P (x, y), nombrando siempre la abscisa la primera.

Luego, según el convenio anteriormente establecido, las coordenadas de un punto P, según el cuadrante en que esté, tendrán los signos que se indican en la figura 46. Así, el punto (— 4, 3), de la misma figura, tiene la abscisa x = — 4, y la ordenada, y = 3.

147. **Representación gráfica de funciones dadas por una ecuación.** La función hace corresponder a cada valor de *x* un valor determinado de *y*. Los pares de valores así hallados pueden considerarse como las coordenadas de los puntos de un plano; la línea que resulta uniendo esos puntos se llama *gráfica de la función.*

Ejemplo. — *Trazar la gráfica de las funciones:*

$$y = 7 - 2x$$
$$y = 2x - 1.$$

Solución: Dando valores arbitrarios a *x,* y hallando los correspondientes de *y,* formamos el siguiente cuadro de valores:

x	— 2	— 1	0	1	2	3	4
y	11	9	7	5	3	1	— 1

Representando gráficamente estos pares de valores en un sistema de ejes de coordenadas rectangulares obtenemos la línea recta A B (fig. 47). (En el eje de abscisas se ha tomado unidad doble que en el de ordenadas.)

Dando valores arbitrarios a x en la segunda función se obtiene:

x	−2	−1	0	1	2	3	4
y	−5	−3	−1	1	3	5	7

La gráfica es la recta C D.
Las dos rectas se cortan en el punto E (2, 3).

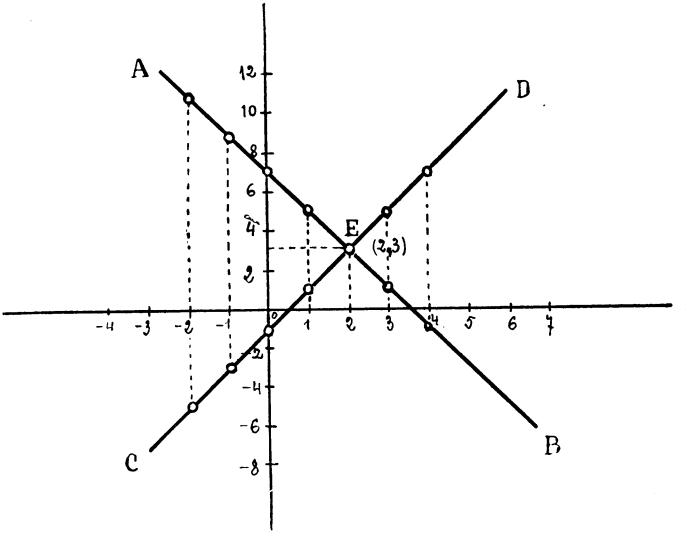


FIG. 47

El par de valores $x = 2$, $y = 3$ satisface, por tanto, a las dos ecuaciones dadas, y es la solución del sistema formado por ambas.

La gráfica de una ecuación con dos variables es una línea que contiene todos los puntos cuyas coordenadas satisfacen a la ecuación, y solamente aquéllos.

Por el ejemplo anterior, se ve que la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas viene dada por las coordenadas del punto de intersección de sus gráficas, ya que dichas coordenadas satisfacen a las dos ecuaciones.

148. **Clasificación de las funciones.** — Indicaremos algunas clases de funciones que son de uso muy corriente:

a) *Funciones empíricas.* — Funciones *empíricas* son aquellas en que su relación de dependencia con respecto a la variable independiente no puede expresarse mediante una fórmula matemática, y cuyas gráficas tienen, por eso, que hallarse sólo por datos experimentales. Por ejemplo, la temperatura de un enfermo en relación con las

horas del día, y la tensión del vapor de agua saturado en función de la temperatura.

b) *Funciones analíticas.* — Funciones *analíticas* son aquellas cuya relación de dependencia respecto a los valores de la variable independiente se puede expresar por una fórmula matemática. Estas funciones se llaman *trascendentes* cuando su relación de dependencia viene dada mediante un logaritmo, una exponencial o una razón trigonométrica, por ejemplo:

$$y = \log x; \quad y = a^x \quad y = \operatorname{sen} x; \quad y = \operatorname{tg} x.$$

Y se llaman *algebraicas* cuando para calcular el valor de y, la variable x ha de someterse sólo a operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación) en número finito, como:

$$y = \frac{7x^2 + \sqrt{6x}}{5x - 3}$$

Las funciones algebraicas se dividen en *irracionales* y *racionales*, según sus fórmulas tengan o no radicales que afecten a la variable. Las racionales se dividen en *fraccionarias* y *enteras*, según que tengan o no denominadores con la variable; y las enteras se subdividen en grados, como $mx + p$, de primer grado; $ax^2 + bx + c$, de segundo grado, etcétera.

Puede resumirse la clasificación que acabamos de hacer en el siguiente cuadro:

- Funciones
  - empíricas
  - analíticas
    - transcendentes
      - exponencial
      - logarítmica
      - goniométricas
    - algebraicas
      - irracionales
      - racionales
        - fraccionarias
        - enteras
          - 1.er grado
          - 2.º grado
          - 3.er grado

c) *Funciones implícitas y explícitas.* — Se denominan *implícitas* a aquellas funciones que están ligadas a su variable x por una ecuación no resuelta; tal es la ordenada de la circunferencia dada por la ecuación $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Veces hay que se puede despejar la variable y; pero también hay otras en que esto no puede hacerse, según enseñan conocimientos superiores.

Explícitas, cuando la función y viene despejada en un miembro, y en el otro aparece el conjunto de operaciones que hay que efectuar con la variable x para obtener la función y. Por ejemplo:

$$y = 4x^3 - 3x^2 + \frac{5x}{7}; \qquad y = \frac{\sqrt{2x}}{5 - x^2}; \qquad y = \frac{\sqrt{x^3 - 2}}{x^2}.$$

d) *Funciones directa e inversa.* — Dada una función $y = f(x)$, se denomina función *inversa* de ella a la función:

$$y = \varphi(x)$$

que se obtiene despejando en ella x, y cambiando la variable y en x y la variable x en y. La función dada se llama *directa*.

Por ejemplo, si tenemos la función (directa):

$$y = x^2,$$

al despejar x en ella sale $x = \pm\sqrt{y}$, y cambiando la variable en función, y la función en variable, se obtienen dos funciones inversas:

$$y = \sqrt{x}; \qquad y = -\sqrt{x}.$$

Si para construir la gráfica de una función inversa tomamos para abscisas la ordenada de un punto de la directa, sale como ordenada la abscisa del mismo punto de la directa. Por tanto, *las gráficas de ambas funciones son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.* En efecto; si A y B son, respectivamente, dos puntos correspondientes de la directa e inversa, los triángulos rectángulos $AA'O$ y $BB'O$ son iguales, por ser $OA' = OB'$ y $A'A = B'B$; luego $\widehat{BOB'} = \widehat{AOA'}$ y $OB = AO$. Por tanto, el triángulo AOB es isósceles y la bisectriz OH del ángulo AOB es mediatriz del segmento AB, que es lo que deseábamos demostrar (figura 48).

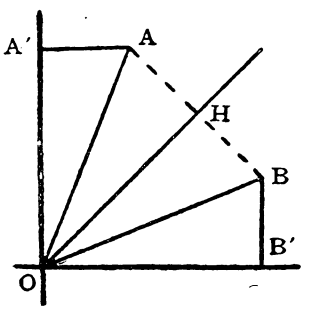


FIG. 48

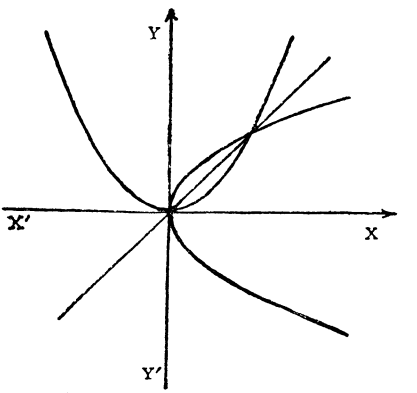


FIG. 49

Por ejemplo, en la figura 49 hemos representado la función $y = x^2$. Sus inversas, las funciones $y = \pm \sqrt{x}$ representan otra parábola cuya directriz es paralela a O Y. Ambas son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante (fig. 49).

149. **Representación gráfica de la función de segundo grado.** — La función de segundo grado es de la forma:

$$y = a x^2 + b x + c.$$

Se demuestra en cursos superiores que su representación gráfica es siempre una *parábola* cuyo eje es paralelo al eje Y' Y.

Ejemplo 1. — *Hallar la gráfica de la función:*

$$y = x^2 - 2x - 3 \qquad (1)$$

Solución: Según se estudió en el Algebra de 4.° curso la función (1) puede escribirse:

$$y = (x - 3)(x + 1) \qquad (2)$$

donde se ve que y se anula para $x = 3$ y $x = -1$. Luego, la gráfica corta en estos puntos al eje X' X. Para los valores de x menores que -1, los dos paréntesis de (2) son negativos, luego y es positivo y la gráfica está por encima del eje X' X.

Para los valores de x comprendidos entre 3 y -1 el primer paréntesis de (2) es negativo y el segundo positivo, luego y es negativo estando la gráfica en este intervalo por debajo de X' X. En el punto $x = 1$, intermedio entre $x = 3$ y $x = -1$ alcanzará la función su valor mínimo.

Finalmente, para los valores de x mayores que 3 los dos paréntesis de (2) son positivos, siéndolo también en consecuencia la función y.

Podemos formar el siguiente cuadro de valores:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y	12	5	0	−3	−4	−3	0	5	12

La gráfica viene representada en la figura 50; es una parábola.

Ejemplo 2. — *Representar gráficamente la función:*

$$y = x^2 - 2x + 1 \qquad (3)$$

Solución: Esta función puede escribirse, como se explicó en Cuarto Curso:

$$y = (x - 1)^2 \qquad (4)$$

No se anula más que para $x = 1$. Este es el único punto en que la gráfica toca al eje X' X. Para todos los demás valores de x será y positivo, ya que viene expresado en (4) por una potencia de exponente par.

Dando valores arbitrarios a x, hallamos los correspondientes de y en el siguiente cuadro:

x	−2	−1	0	1	2	3	4
y	9	4	1	0	1	4	9

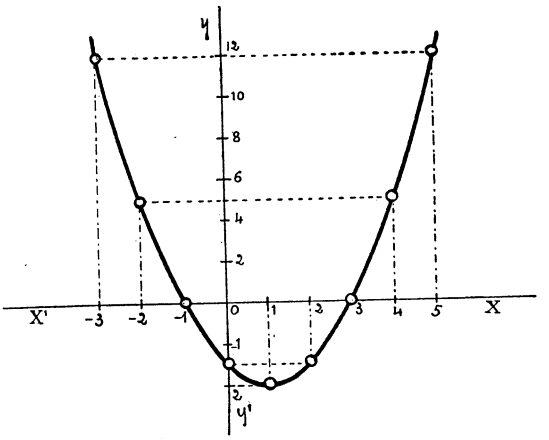


FIG. 50

La parábola de la figura 51, es la representación gráfica de esta función.

Ejemplo 3. — *Representar gráficamente la función:*

$$y = x^2 + x + 1.$$

Solución: Dicha función no se anula para ningún valor de x, y, por tanto, su gráfica no corta al eje X'X. Queda toda por encima del mismo. Dando valores:

x	−3	−2	−1	0	1	2
y	7	3	1	1	3	7

resulta la parábola de la figura 52.

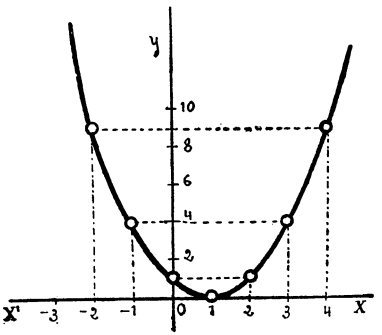


FIG. 51

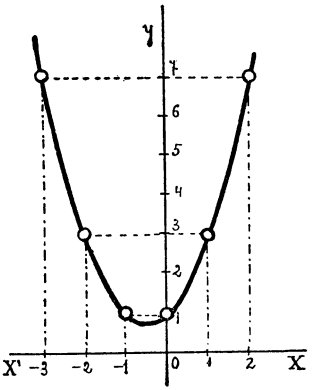


FIG. 52

150. **Representación gráfica de la función entera.** — Se llama así a la función de la forma $y = x^m$, donde x toma todos los valores desde $-\infty$ a $+\infty$, y m todos los valores positivos y enteros.

Representaremos, como ejemplo la función:

$$y = x^3.$$

Dando valores arbitrarios a x hallaremos los correspondientes de y, según el siguiente cuadro:

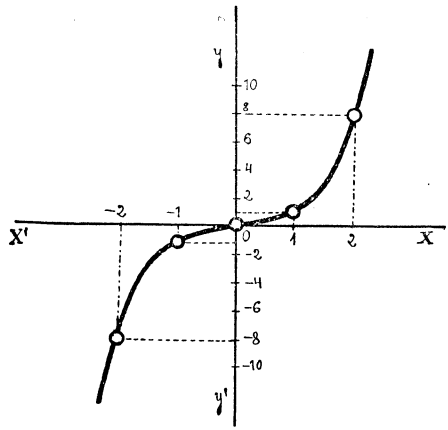


FIG. 53

x	−2	−1	0	1	2
y	−8	−1	0	1	8

Representando estos pares de valores en un sistema de coordenadas rectangulares resulta la gráfica de la figura 53. En ella se han tomado las unidades del eje de abscisas cuatro veces mayores que las del eje de ordenadas.

151. **Representación gráfica de la proporcionalidad directa.** — Se sabe que si dos magnitudes son directamente proporcionales, la razón de dos valores correspondientes cualesquiera es constante.

Sea x un valor de la primera magnitud, e y su valor correspondiente de la segunda magnitud. Se tendrá:

$$\frac{y}{x} = k; \quad \text{o sea} \quad y = kx.$$

Representando esta función sobre un sistema de coordenadas cartesianas, se obtiene como gráfica una *línea recta* que pasa por el origen de coordenadas y tanto más próxima a la vertical cuanto mayor es k. Esta gráfica nos permitirá hallar para cada valor de x el valor correspondiente de y. El coeficiente k se llama *pendiente* de la recta.

EJEMPLO 1. — Sea la proporcionalidad directa $y = 2x$. Hallemos el cuadro de valores:

x	−2	−1	0	1	2
y	−4	−2	0	2	4

La representación gráfica viene dada en la figura 54. La pendiente de la recta es 2.

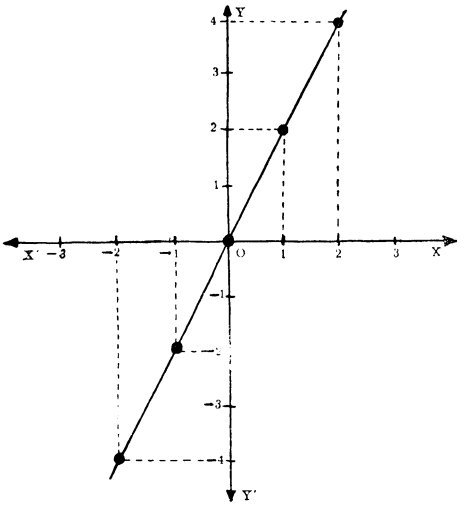


FIG. 54

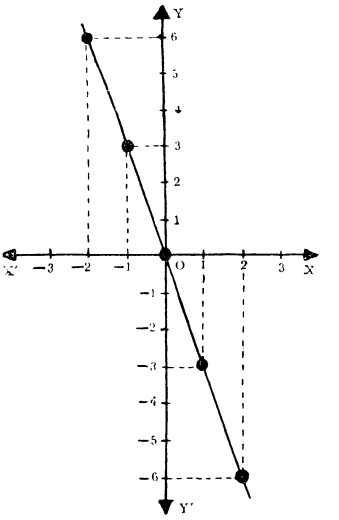


FIG. 55

EJEMPLO 2. — Sea la proporcionalidad directa $y = -3x$. Hallando el cuadro de valores:

x	−2	−1	0	1	2
y	6	3	0	−3	−6

La figura 55 da su gráfica. La pendiente de la recta es −3.

152. **Representación gráfica de la proporcionalidad inversa.** — Se sabe que si dos magnitudes son inversamente proporcionales, el producto de dos cantidades correspondientes es constante.

Sea x una cantidad de la primera magnitud, e y su correspondiente en la segunda magnitud. Será:

$$x \cdot y = k; \quad \text{o sea} \quad y = \frac{k}{x}.$$

Esta función es de aplicación frecuente en la Física. Representemos como ejemplo, $y = \frac{12}{x}$.

Formaremos el cuadro de valores:

x	— 12	— 6	— 4	— 3	— 2	— 1	0	1	2	3	4	6	12
y	— 1	— 2	— 3	— 4	— 6	— 12	∞	12	6	4	3	2	1

La representación gráfica es una *hipérbola equilátera* cuyo eje real es la bisectriz del primer y tercer cuadrante (fig. 56). Los ejes de coordenadas X′X e Y′Y se aproximan indefinidamente a las ramas de la hipérbola. Rectas tales se denominan *asíntotas* de la curva.

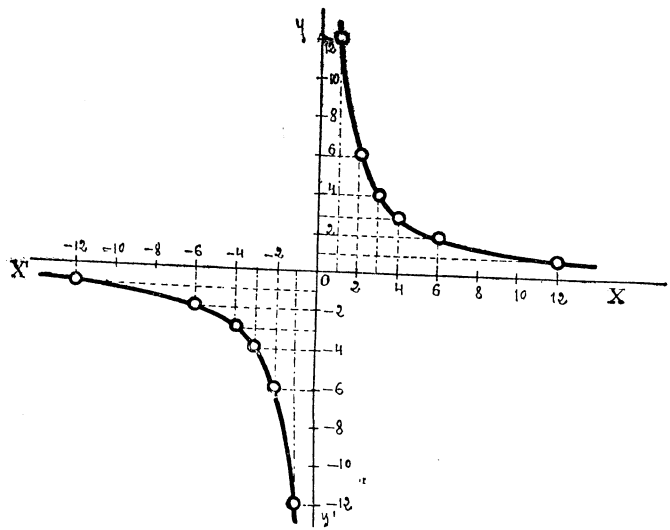


FIG. 56

153. **Función exponencial.** — *Se llama así a la función,*

$$y = a^x \qquad (5)$$

que consta de un número real positivo fijo a, distinto de 0 *y de* 1, *elevado a un exponente que es la variable independiente* x, *la cual puede tomar todos los valores desde* $-\infty$ *hasta* $+\infty$.

Supongamos $a > 1$. Entonces la función exponencial goza de las siguientes propiedades:

1.ª *Es una función creciente para todos los valores de* x. En efecto, se demostró (núm. 22) que las potencias de los números mayores que la unidad crecen con el exponente. Luego si $x_1 < x_2$, será siempre $a^{x_1} < a^{x_2}$.

2.ª *La función no toma nunca valores negativos.* Pues si fuera:

$$-b = a^c$$

se tendrá:

$$a = \sqrt[c]{-b}$$

lo cual es imposible, pues una raíz de un número negativo ha de ser o negativa o imaginaria; y $a > 1$. Cuando el exponente c sea fraccionario, de denominador par, convenimos en tomar para la potencia sólo el valor positivo. Análogamente cuando el exponente es irracional.

3.ª *Puntos notables:*

$$\text{Para } x = -\infty \quad , \quad y = a^{-\infty} = \frac{1}{a^{\infty}} = 0$$

$$\text{Para } x = 0 \quad , \quad y = a^{0} = 1$$

$$\text{Para } x = 1 \quad , \quad y = a^{1} = a$$

$$\text{Para } x = \infty \quad , \quad y = a^{\infty} = \infty.$$

De las propiedades anteriores se deduce inmediatamente la representación gráfica de la exponencial (figura 57).

Para los valores negativos de x, y toma valores positivos menores que 1, y de modo que cuando, $x \to -\infty$, $y \to 0$. La curva se acerca, pues, indefinidamente al eje OX sin tocarle nunca. Se dice que OX es *asíntota* de la curva.

Para los valores positivos de x, es $y > 1$, y crece indefinidamente cuando $x \to \infty$.

Si $a < 1$, la gráfica resulta simétrica de la anterior respecto a OY.

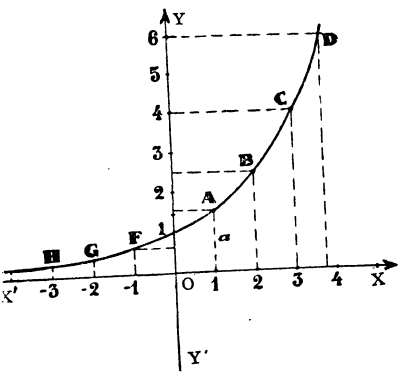


FIG. 57

154. **Función logarítmica: representación gráfica.** — La función logarítmica es de la forma

$$y = \log_a x \tag{6}$$

con las restricciones impuestas en la definición del número 68. Su gráfica viene dada en la figura 58, según se deduce de las propiedades estudiadas en la Lección 9.ª Hay que hacer notar, además, que la función logarítmica es la inversa de la exponencial, pues despejando x en la fórmula (5) sale:

$$\log_a y = x$$

y cambiando entre sí las variables:

$$y = \log_a x.$$

Luego las gráficas de las dos funciones son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante.

En la figura 58 se observa que, si la base $b > 1$:

a) *Los números negativos no tienen logaritmo.*

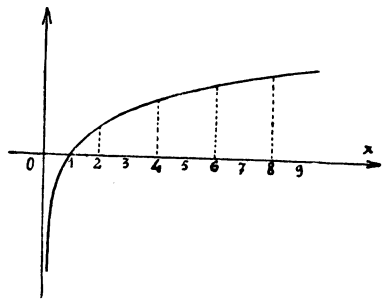


FIG. 58

b) *El logaritmo de 1 es siempre cero.*

c) *Los números menores que 1 tienen logaritmo negativo,* que decrece con el número y tiende a $-\infty$ cuando $x \to 0$.

d) *El logaritmo de cero es* $-\infty$, ya que O Y es *asíntota* de la curva.

e) *Los números mayores que 1 tienen logaritmo positivo,* que crece con el número, tendiendo a ∞ al hacerlo x.

155. **Tangente a una curva en un punto.** — A primera vista parece que podría definirse la tangente a una curva cualquiera, como en la circunferencia, diciendo que es la recta que solamente la toca en un punto.

Nada más falso. Hay, en efecto, tangentes que tocan a la curva en más de un punto. Así, en la gráfica de la función $y = x^3$, la tangente en el punto A (figura 59) corta a la curva en los puntos A y A'.

Se define, pues: *Tangente a una curva en un punto A es la posición límite de las cuerdas A B cuando el punto B tiende a confundirse con el A.*

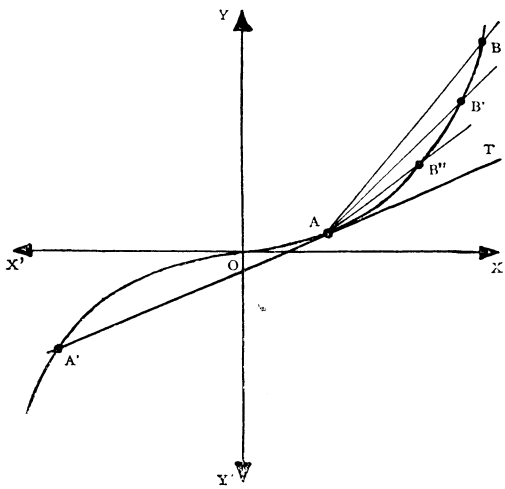


FIG. 59

156. **Incrementos.** — Cuando una variable x cambia su valor, la variación que ha sufrido se denomina *incremento de* x y se representa por Δx. Dicho incremento puede consistir en un aumento o en una disminución. En el primer caso el incre-

mento es positivo, y en el segundo, negativo. Así, cuando x pasa de valer 4 a valer 4'5, el incremento es: $\Delta x = 4'5 - 4 = 0'5$.

Y cuando x pasa de 2 a 1'5, el incremento es $\Delta x = 1'5 - 2 = -0'5$.

Siendo y función de x, a cada valor de éste corresponderá otro determinado de y; o sea al variar x, variará también y. Luego al tomar x un incremento Δx, y tomará otro incremento Δy (fig. 60).

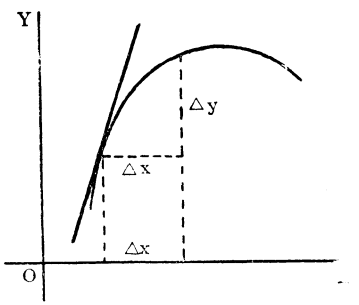


FIG. 60

157. **Continuidad.** — *Una función* $y = f(x)$ *es continua para* $x = a$ *(o en el punto* $x = a$*) si* Δy *tiende a cero al tender hacia cero* Δx.

Y se llama continua en un intervalo cuando lo es para todos los valores de x *de este intervalo.*

Gráficamente, esto sucede siempre que la curva representativa de la función no presenta saltos ni interrupciones (fig. 61).

Es evidente que una función continua no puede cambiar bruscamente de valor, ya que podemos hacerla variar tan poco como queramos tomando el incremento de x suficientemente pequeño. Como consecuencia, si una función continua toma un valor A para $x = a$, y un valor B para $x = b$, tomará un valor C comprendido entre A y B, por lo menos para un valor de x comprendido entre a y b.

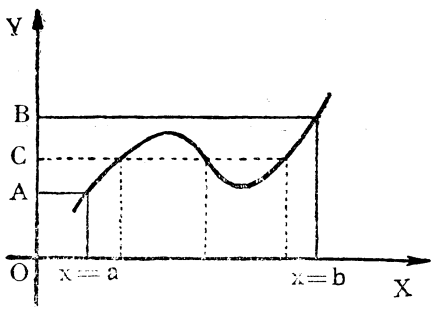


FIG. 61

158. **Noción de derivada.** — *Derivada de una función en un punto es el valor límite al que tiende el cociente de incrementos* $\Delta y/\Delta x$ *cuando* Δx *tiende a cero.*

La derivada se representa por y' o por $\dfrac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

De la definición de derivada y de la teoría de los límites se deduce que para que exista la derivada de una función para un cierto

valor de la variable independiente, *necesariamente* la función debe ser continua para este valor de la variable. O sea, la derivada no existirá en los puntos en que Δy no tiende a cero cuando $\Delta x \to 0$, esto es, en los puntos en que la función es discontinua. De ahí la importancia del estudio hecho sobre la continuidad.

Regla general para derivar. — De la definición de derivada se deduce que el procedimiento para derivar una función $y = f(x)$ requiere los siguientes pasos:

Paso primero: *En la función se reemplaza* x *por* $x + \Delta x$ *y se calcula el nuevo valor de la función* $y + \Delta y$.

Paso segundo: *Se resta el valor de la función del nuevo valor, y así se tiene* Δy *(incremento de la función).*

Paso tercero: *Se divide el incremento* Δy *de la función por el incremento* Δx *de la variable independiente.*

Paso cuarto: *Se halla el límite de este cociente cuando* Δx *(incremento de la variable independiente) tiende a cero.*

Debemos insistir en que la variable, en este paso cuarto, es Δx y no x. El valor de ésta permanece fijo, constante, desde el principio de la derivación.

Debe el alumno aplicar esta regla a muchos ejemplos. Aquí detallaremos tres:

1.° *Hallar la derivada de la función entera*

$$y = x^m \tag{1}$$

Paso primero:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^m = x^m + m\,x^{m-1}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^m \tag{2}$$

Paso segundo:

Restando (1) de (2):

$$\Delta y = m\,x^{m-1}\Delta x + \binom{m}{2} x^{m-2}(\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^m.$$

Paso tercero:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = m\,x^{m-1} + \binom{m}{2} x^{m-2}\Delta x + \ldots + (\Delta x)^{m-1}.$$

Paso cuarto:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = m\,x^{m-1}.$$

La derivada de la función entera es igual al producto del exponente por la función con exponente disminuído en una unidad.

2.° *Hallar la derivada de la función representativa de la proporcionalidad directa*

$$y = k\,x \tag{3}$$

Paso primero:

$$y + \Delta y = k(x + \Delta x) \tag{4}$$

Paso segundo:

Restando (3) de (4):

$$\Delta y = k \Delta x.$$

Paso tercero:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k.$$

Paso cuarto:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k.$$

3.° *Hallar la derivada de la función representativa de la proporcionalidad inversa*

$$y = \frac{k}{x} \tag{5}$$

Paso primero:

$$y + \Delta y = \frac{k}{x + \Delta x} \tag{6}$$

Paso segundo:

Restando (5) de (6):

$$\Delta y = \frac{k}{x + \Delta x} - \frac{k}{x} = \frac{kx - kx - k\Delta x}{(x + \Delta x) \cdot x} = -\frac{k \Delta x}{x(x + \Delta x)}.$$

Paso tercero:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{k}{x(x + \Delta x)}.$$

Paso cuarto:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{k}{x^2}.$$

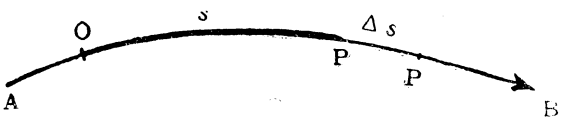


FIG. 62

159. **Interpretación mecánica de la derivada: velocidad lineal y aceleración.** — Sea el movimiento de un punto P sobre la línea A B (fig. 62). Sea s la distancia desde un punto fijo O a cualquier po-

sición de P, y sea t el tiempo correspondiente empleado. A cada valor de t corresponde una posición de P y, por tanto, un espacio s. Luego s será una función continua de t, y podemos escribir:

$$s = f(t).$$

Supongamos ahora que t recibe un incremento Δt; s recibirá entonces un incremento Δs, y será:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v_m \qquad (6)$$

o velocidad media de P cuando el punto se mueve de P a P' durante el intervalo de tiempo Δt. Si P se mueve con movimiento uniforme (velocidad constante), la razón anterior tendrá el mismo valor para cualquier intervalo de tiempo, y es la velocidad en cualquier instante.

En el caso general de cualquier clase de movimiento, uniforme o no, definimos la *velocidad en un instante dado como el límite de la velocidad media al tender* Δt a cero; esto es:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

o sea:

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

La velocidad en un instante dado es la derivada del espacio con respecto al tiempo.

Análogamente, si v es la velocidad del punto P al fin del tiempo t, y si A B es una recta, de modo que la velocidad tenga una dirección constante, será:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \textit{aceleración media durante el intervalo } \Delta t;$$

y su límite:

$$\frac{dv}{dt} = \textit{aceleración en el instante } t.$$

La aceleración en un instante dado es la derivada de la velocidad respecto al tiempo.

EJERCICIOS

En un sistema de ejes rectangulares representar los puntos siguientes:

	a)	b)	c)
1.	(5, 3)	(5, — 3)	(— 5, — 3)
2.	(0, 5)	(0, — 5)	(— 5, 0)
3.	(3, 1)	(5, 2)	(3, — 4)
4.	(5, $\sqrt{2}$)	(π, 3)	(π, — 2)
5.	(— $\sqrt{2}$, 3)	($\sqrt{3}$, — 4)	(5, — 3).

Hallar las distancias desde el origen de coordenadas a los puntos siguientes:

	a)	b)	c)
6.	(3, 4)	(12, — 5)	(— 15, 8)
7.	(2, $\sqrt{5}$)	(6, 8)	(— 3, $\sqrt{6}$).

Hallar las gráficas de las funciones siguientes:

8. $y = 3x - 7$.
9. $y = -x + 2$.
10. $y = 2x - 1$.
11. $y = \frac{1}{2}x^2$.
12. $y = \frac{1}{5}x^3$.
13. $y = x^2 + x - 2$.
14. $y = x^2 - 4x + 4$.
15. $y = 2x^2 - 8$.
16. $y = x^2 - x + 4$.
17. $y = \frac{10}{x}$.

Resolver gráficamente los sistemas siguientes:

18. $x + y = 5$.
    $2x - 3y = 0$.
19. $x - y = 7$.
    $x + 2y = 1$.
20. $y = x^2$.
    $x - y + 2 = 0$.
21. $xy = 12$.
    $x - y = 4$.

TRIGONOMETRIA

20

Razones trigonométricas

160. **Angulos positivos y negativos.** — Dado un ángulo cualquiera X O B (fig. 63), consideraremos en él siempre un *lado origen,* por ejemplo, el O X, y un *lado extremo, O B.* Tomaremos el lado origen O X, como *eje de abscisas* en un sistema de coordenadas rectangulares, en el cual O Y será el *eje de ordenadas.*

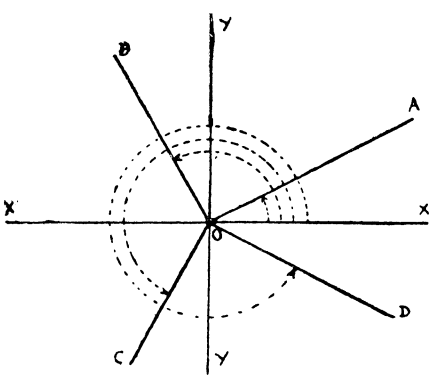


FIG. 63

Entonces puede considerarse el ángulo X O B como engendrado por la rotación de la semirrecta O X alrededor del punto O, desde la posición O X hasta O B. Si la semirrecta gira *en sentido contrario* de las agujas de un reloj, el ángulo X O B se denomina *positivo.* Si la semirrecta gira en el *mismo sentido* de las agujas de un reloj, se acostumbra a llamarlo *negativo.* Puesto que se ha convenido en tomar siempre el lado origen del ángulo como eje de abscisas, la posición del lado extremo dependerá de la magnitud del ángulo. Así todos los ángulos agudos, como el $\widehat{XOA}$ (fig. 63), tendrán su lado extremo en el *primer cuadrante;* todos los ángulos obtusos, como el $\widehat{XOB}$, tendrán el lado extremo en el segundo cuadrante; los ángulos cóncavos, como el $\widehat{XOC}$ o el $\widehat{XOD}$, lo tendrán en el *tercero o cuarto cuadrante.*

161. **Medida circular o en radianes de un ángulo.** — *Radián es el ángulo central cuyo arco correspondiente tiene una longitud igual al radio.*

Sea una circunferencia (fig. 64) de radio r, y en ella dos arcos, AB' y $AB = r$, cuyos ángulos centrales correspondientes valen α radianes y 1 radián, respectivamente.

Ya que los ángulos centrales son proporcionales a las longitudes de sus arcos correspondientes, tendremos:

$$\frac{AB'}{r} = \frac{\alpha}{1}.$$

De donde:

$$AB' = \alpha r \qquad (1)$$

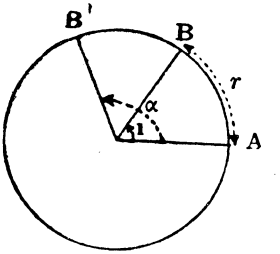


FIG. 64

Luego *la longitud de un arco es igual al producto de la medida en radianes de su ángulo central por el radio.*

Si en la igualdad (1) hacemos $r = 1$, resulta:

$$AB' = \alpha \qquad (2)$$

La circunferencia en que se toma el radio igual a la unidad de medida se llama *circunferencia goniométrica.*

Por tanto, la fórmula (2) nos dice que *la longitud de un arco medido en radios viene expresada por el mismo número que su ángulo central correspondiente medido en radianes.*

Si en la fórmula (1) AB' fuera la longitud de la circunferencia completa, se tendría:

$$2\pi r = \alpha r$$

o sea:

$$\alpha = 2\pi \qquad (3)$$

Es decir, *el ángulo correspondiente a una circunferencia completa, medido en radianes, es igual a* 2π.

Esta relación nos permite pasar de la medida en grados a la medida circular, (es decir, la medida en radianes), y viceversa.

Ejemplos. — Por medio de proporciones, comprobar los casos siguientes de equivalencias entre grados y radianes:

a) $180^\circ \equiv \pi$ radianes (*); $\quad \therefore 1.^\circ \equiv \dfrac{\pi}{180}$ radianes;

b) π radianes $\equiv 180^\circ$; $\quad \therefore 1$ radián $\equiv \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ$.

(*) Empleamos el signo $\equiv$ para expresar la equivalencia entre dos números concretos de distinta especie.

El valor de un radián es, pues:

$$\frac{180}{\pi} = 57^\circ\, 17'\, 44'',\, 8.$$

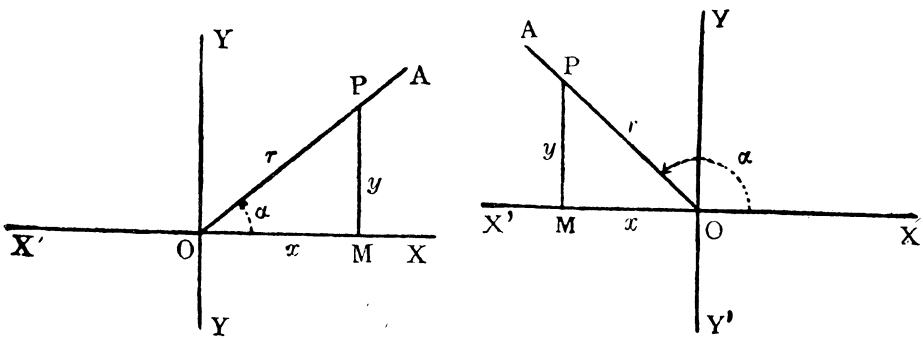


FIG. 65

162. **Definición de las razones trigonométricas.** — Sea el ángulo X O A = α (figs. 65 y 66). Desde un punto cualquiera P del lado extremo O A, se traza una perpendicular P M al lado origen (prolon-

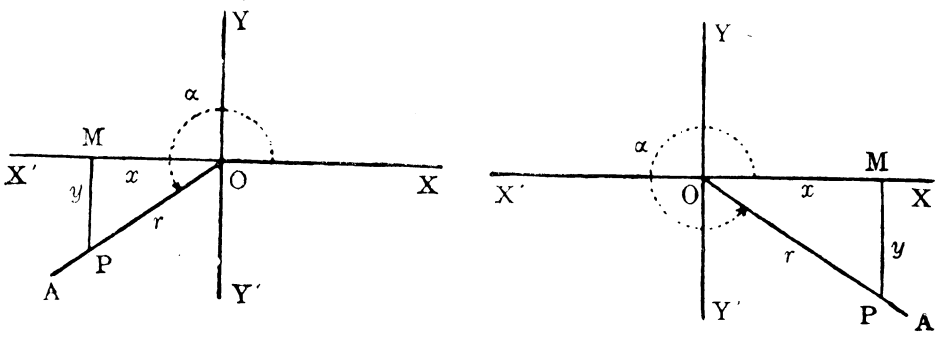


FIG. 66

gado si es necesario). Designemos las coordenadas del punto P por (x, y), y la distancia O P por r, o *radio*. Entre estas tres cantidades, x, y, r, existen 6 razones, tres directas y tres inversas, que se han denominado *razones trigonométricas*. Son:

SENO *es la razón de la ordenada al radio.* Se representa así:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{r} \tag{4}$$

COSENO *es la razón de la abscisa al radio:*

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \tag{5}$$

TANGENTE *es la razón de la ordenada a la abscisa:*

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \tag{6}$$

COTANGENTE *es la razón de la abscisa a la ordenada:*

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y} \tag{7}$$

SECANTE *es la razón del radio a la abscisa:*

$$\sec \alpha = \frac{r}{x} \tag{8}$$

COSECANTE *es la razón del radio a la ordenada:*

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{r}{y} \tag{9}$$

Aplicando las definiciones anteriores al *triángulo rectángulo* resulta, como caso particular:

Seno *de un ángulo agudo es la razón entre el cateto opuesto al mismo y la hipotenusa.*

Coseno *de un ángulo agudo es la razón entre el cateto opuesto al mismo y la hipotenusa.*

Tangente *de un ángulo agudo es la razón entre el cateto opuesto al mismo y el cateto adyacente.*

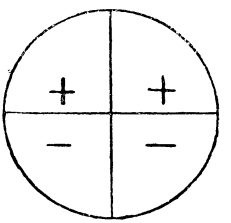
Cotangente *de un ángulo agudo es la razón entre el cateto contiguo y el opuesto.*

Secante *de un ángulo agudo es la razón entre la hipotenusa y el cateto contiguo.*

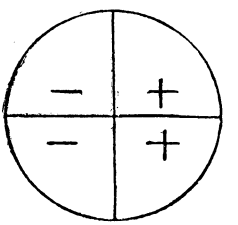
Cosecante *de un ángulo agudo es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto.*

163. **Signos de las razones trigonométricas en los cuatro cuadrantes.** — El *radio r* se toma siempre en valor absoluto, o sea que se considera siempre positivo.

Luego el signo de las razones goniométricas dependerá sólo de los signos que tengan las coordenadas de los puntos del lado extremo del ángulo X O A. Así, dichos signos serán los que se indican en las siguientes figuras (figs. 67 y 68):



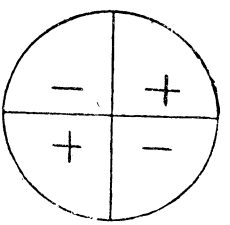
a) Seno-cosecante



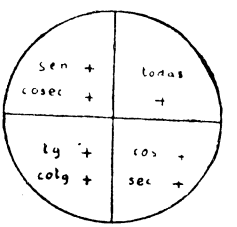
b) Coseno-secante

FIG. 67

164. **Representación geométrica.** — Sabemos que las funciones goniométricas son *razones* de dos segmentos, y, por tanto, son *números abstractos;* pero podemos representarlas por *un solo segmento,* si elegimos una unidad de longitud, y construímos triángulos rectángulos, tales que los denominadores de las razones sean iguales a esta unidad.



a) Tangente-cotangente



b) Razones positivas

FIG. 68

Sea un ángulo cualquiera X O V. Con un radio igual a la unidad y centro en O, se traza la circunferencia.

Esta circunferencia de radio 1 se llama *circunferencia goniométrica.*

Desde el punto de intersección P de esa circunferencia con el lado extremo O V, se traza P M ⊥ O X, P N ⊥ O B y las tangentes

en el origen y extremo del primer cuadrante, según indica la fig. 69.

Designemos por α al ángulo X O V.

Se tiene: O A = O P = O B = 1, y, por tanto:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{MP}{OP} = MP$$

$$\cos\alpha = \frac{OM}{OP} = OM$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{MP}{OM} = \frac{AT}{OA} = AT$$

$$\operatorname{cotg}\alpha = \operatorname{ctg}\overset{\frown}{OSB} = \frac{BS}{OB} = BS$$

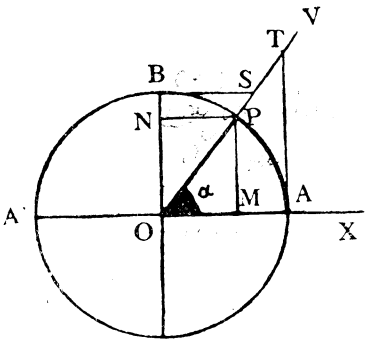


FIG. 69

$$\sec\alpha = \frac{OP}{OM} = \frac{OT}{OA} = OT$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \operatorname{cosec}\overset{\frown}{OSB} = \frac{OS}{OB} = OS.$$

Es fácil ver que $\overset{\wedge}{\alpha} = \overset{\frown}{OSB}$, ya que son alternos internos entre paralelas.

Podemos, pues, enunciar estos resultados: *En la circunferencia goniométrica,* SENO *de un ángulo es la ordenada del extremo del arco correspondiente.*

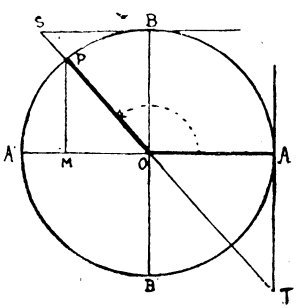


FIG. 70

COSENO *de un ángulo es la abscisa del extremo del arco correspondiente.*

TANGENTE *de un ángulo es el segmento orientado de la tangente a la circunferencia en el origen de arcos, limitado por el lado extremo del ángulo.*

Así, por ejemplo, si el ángulo es obtuso (figura 70) el segmento orientado A T estará por debajo del eje O X; luego será negativo, y, por tanto, también lo será la tangente. En el mismo ángulo, la abscisa del extremo del arco P es negativa (luego el coseno

lo es) y su ordenada es positiva (luego el seno también). Análogas relaciones existen cuando los ángulos están en el 3.° ó 4.° cuadrante (figuras 71 y 72).

COTANGENTE *de un ángulo es el segmento orientado de la tangente a la circunferencia en el extremo del primer cuadrante, limitado por el lado extremo del ángulo.*

SECANTE *es el segmento del lado extremo del ángulo comprendido entre el centro de la circunferencia y la tangente en el origen de arcos.*

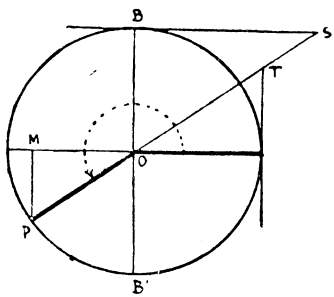


FIG. 71

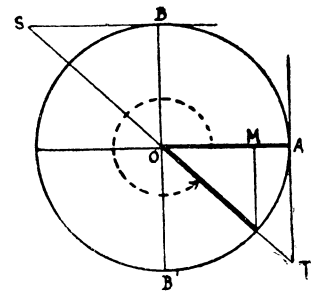


FIG. 72

COSECANTE *es el segmento del lado extremo del ángulo comprendido entre el centro de la circunferencia y la tangente en el extremo del primer cuadrante:*

El signo de la secante y cosecante se determina teniendo en cuenta que son los inversos del coseno y seno, respectivamente, y, por tanto, tendrán el mismo signo que éstos.

Los anteriores resultados explican el uso de los nombres de *tangente* y *secante,* ya que *A T* es una tangente a la circunferencia y *O T* una secante.

En el caso explicado en este número, las razones trigonométricas se llaman *líneas trigonométricas.*

165. **Relaciones fundamentales entre las razones de un mismo ángulo.** — Multiplicando las relaciones (4) y (9) se obtiene:

$$\mathbf{sen}\ \alpha\ .\ \mathbf{cosec}\ \alpha = \mathbf{1} \qquad (10)$$

Multiplicando (5) con (8):

$$\mathbf{cos}\ \alpha\ .\ \mathbf{sec}\ \alpha = \mathbf{1} \qquad (11)$$

y multiplicando (6) con (7):

$$\mathbf{tg}\ \alpha\ .\ \mathbf{ctg}\ \alpha = \mathbf{1} \qquad (12)$$

Dividiendo las igualdades (4) y (5) resulta:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y : r}{x : r} = \frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha$$

o sea:

$$\mathbf{tg}\,\alpha = \frac{\mathbf{sen}\,\alpha}{\mathbf{cos}\,\alpha} \qquad (13)$$

Elevando al cuadrado las mismas (4) y (5), sumando y teniendo en cuenta que $x^2 + y^2 = r^2$ (figura 61), sale:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

o sea:

$$\mathbf{sen}^2\,\alpha + \mathbf{cos}^2\,\alpha = \mathbf{1} \qquad (14)$$

Las fórmulas (10) a (14) forman 5 relaciones, entre sí independientes, que ligan a las 6 razones trigonométricas de un ángulo, y que permiten hallar las 5 restantes conociendo una de ellas.

Existen otras relaciones secundarias de bastante interés. De la igualdad $x^2 + y^2 = r^2$, se deduce:

$$1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2}$$

o sea:

$$\mathbf{1} + \mathbf{tg}^2\,\alpha = \mathbf{sec}^2\,\alpha \qquad (15)$$

y análogamente:

$$\frac{x^2}{y^2} + 1 = \frac{r^2}{y^2}$$

$$\mathbf{1} + \mathbf{ctg}^2\,\alpha = \mathbf{cosec}^2\,\alpha \qquad (16)$$

Ejemplo 1. — *Dado* $tg\,\alpha = -\frac{4}{3}$, *hallar las restantes razones, sabiendo que* α *está en el segundo cuadrante.*

Solución: Será:

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{3}{4}$$

y en virtud de la fórmula (15):

$$\sec^2\alpha = 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9}$$

$$\sec \alpha = -\frac{5}{3}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sec \alpha} = -\frac{3}{5}.$$

Aplicando la fórmula (16):

$$\operatorname{cosec}^2 \alpha = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{5}{4}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{\operatorname{cosec} \alpha} = \frac{4}{5}.$$

Ejemplo 2. — *Dado* $\cos \alpha = \frac{1}{3}$, *hallar los valores de las cinco razones restantes.*

Solución: Aplicando la fórmula (14):

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{1}{9} = 1; \qquad \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{8}{9}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \pm \sqrt{\frac{8}{9}} = \pm \frac{2}{3} \sqrt{2}.$$

El doble signo proviene de que el lado extremo del ángulo α puede estar en el primero o en el cuarto cuadrante, y según esto, el seno será positivo o negativo.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\pm 2\sqrt{2} : 3}{1 : 3} = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\pm 2\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = 3$$

$$\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \pm \frac{3}{2\sqrt{2}} = \pm \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

166. **Dada una razón trigonométrica de un ángulo, hallar las restantes razones.** — Aplicando métodos análogos a los empleados en los dos ejemplos anteriores, se encuentran los resultados siguientes, que podemos colocar en forma de cuadro:

	$\operatorname{sen}\alpha = n$	$\cos\alpha = n$	$\operatorname{tg}\alpha = n$	$\operatorname{ctg}\alpha = n$	$\sec\alpha = n$	$\operatorname{cosec}\alpha = n$
$\operatorname{sen}\alpha$	n	$\pm\sqrt{1-n^2}$	$\pm\dfrac{n}{\sqrt{1+n^2}}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{n^2-1}}{n}$	$\dfrac{1}{n}$
$\cos\alpha$	$\pm\sqrt{1-n^2}$	n	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1+n^2}}$	$\pm\dfrac{n}{\sqrt{1+n^2}}$	$\dfrac{1}{n}$	$\pm\dfrac{\sqrt{n^2-1}}{n}$
$\operatorname{tg}\alpha$	$\pm\dfrac{n}{\sqrt{1-n^2}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-n^2}}{n}$	n	$\dfrac{1}{n}$	$\pm\sqrt{n^2-1}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}$
$\operatorname{cotg}\alpha$	$\pm\dfrac{\sqrt{1-n^2}}{n}$	$\pm\dfrac{n}{\sqrt{1-n^2}}$	$\dfrac{1}{n}$	n	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}}$	$\pm\sqrt{n^2-1}$
$\sec\alpha$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-n^2}}$	$\dfrac{1}{n}$	$\pm\sqrt{1+n^2}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1+n^2}}{n}$	n	$\pm\dfrac{n}{\sqrt{n^2-1}}$
$\operatorname{cosec}\alpha$	$\dfrac{1}{n}$	$\pm\dfrac{1}{\sqrt{1-n^2}}$	$\pm\dfrac{\sqrt{1+n^2}}{n}$	$\pm\sqrt{1+n^2}$	$\pm\dfrac{n}{\sqrt{n^2-1}}$	n

EJERCICIOS

1. Probar que $30^\circ \equiv \dfrac{\pi}{6}$, $45^\circ \equiv \dfrac{\pi}{4}$, $270^\circ \equiv \dfrac{3\pi}{2}$, $120^\circ \equiv \dfrac{2\pi}{3}$ y expresar en esta forma los ángulos siguientes:

a) 12° *c*) 75° *e*) 144° *g*) 420°
b) 60° *d*) 135° *f*) 150° *h*) 765°

2. Expresar en grados:

a) 0'086 radianes *c*) 1'68 radianes *e*) 5'36 radianes
b) 0'243 radianes *d*) 2'42 radianes

3. Expresar en radianes con tres cifras decimales exactas:

a) 4° *c*) 62° *e*) 210°
b) $26'85^\circ$ *d*) $135'8^\circ$ *f*) 455°

4. Reducir un radián a segundos.
5. Hallar la medida circular de:

a) 4°; *b*) 15°; *c*) 46°; *d*) 100°

y expresar en grados:

e) 0'13 radianes; *f*) 0'45 radianes; *g*) 1'23 radianes.

6. Si a un arco s corresponde un ángulo central de α grados en un círculo de radio r, hacer ver que $s = \dfrac{\pi r \alpha}{180}$.

7. Hallar la longitud de un arco de una circunferencia cuyo radio mide 22 cm. y cuyo ángulo central correspondiente es:

a) 1 radián *c*) 44° *e*) 145°
b) 0'54 radianes *d*) 67° 20'

8. Si un arco mide 2/3 de radio, ¿cuál es la medida de su ángulo central correspondiente, expresado en radianes?

9. En una circunferencia de 16 m. de radio, un arco mide 2 m. Hallar su ángulo central correspondiente expresado en grados y en radianes.

10. Probar que el área de un sector circular es $\dfrac{r^2 \alpha}{2}$, siendo r el radio y α el ángulo central expresado en radianes.

11. Dado $\cos \alpha = \dfrac{3}{5}$, hallar las restantes razones.

12. Si $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{3}{4}$ y α está en el tercer cuadrante, hallar las otras funciones.

13. Dado $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{12}{15}$, hallar $\operatorname{cotg} \alpha$.

14. Dado $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{3}{5}$, hallar los valores de las restantes funciones.

15. Si α está en el tercer cuadrante y se da $\operatorname{cotg} \alpha = \dfrac{3}{7}$, hallar las otras funciones de α.

16. Si $\hat{C}$ está en el tercer cuadrante y $\operatorname{tg} C = \dfrac{13}{6}$, hallar $\sec C$ y $\operatorname{sen} C$.

17. Si $\sec C = \dfrac{3}{2}$, hallar los valores de las funciones de $\hat{C}$.

18. Dada $\operatorname{cotg} C = \dfrac{12}{5}$, hallar los valores de las otras funciones.

19. Dado $\cos C = \dfrac{a}{b}$, hallar los valores de las otras funciones.

20. Hallar $\cos \alpha$, si $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{2mn}{m^2 - n^2}$.

21. Si $\operatorname{sen} \alpha = \dfrac{2m}{1 + m^2}$, hallar $\cos \alpha$.

22. Si $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$, probar que $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ¿Cuáles son los valores de las restantes funciones?

23. ¿Al seno de qué ángulo es igual el producto sen 45° . cos 45°?

24. El producto 2 sen 30° cos 30°, ¿a qué seno y de qué ángulo es igual?

Hallar los valores de las otras funciones de α si:

25. $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{2}{3}$.

26. $\cos\alpha = \dfrac{3}{4}$.

27. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{4}{3}$.

28. $\operatorname{cotg}\alpha = 0'75$.

29. $\sec\alpha = 2$.

30. $\operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{2}$.

31. $\operatorname{sen}\alpha = 0'8$.

32. $\cos\alpha = 0'28$.

33. $\operatorname{cotg}\alpha = 0'5$.

34. Conocida $\operatorname{tg} x = \dfrac{2}{3}$, calcular las demás razones trigonométricas del ángulo x, sabiendo que $\pi < x < \dfrac{3\pi}{2}$.

35. Calcular todas las razones trigonométricas de x, sabiendo que:

$$\operatorname{tg} x = -\frac{2}{5} \quad \text{y} \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

36. Calcular todas las razones trigonométricas de x, sabiendo que:

$$\operatorname{sen} x = 0'6 \quad \text{y siendo} \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi.$$

21

Variación de las razones trigonométricas

167. **Razones trigonométricas del ángulo $180°/n$ en función del lado y apotema del polígono regular de n lados.** — Sea $AB = l_n$ el lado del polígono regular de n lados en una circunferencia de radio r (figura 73).

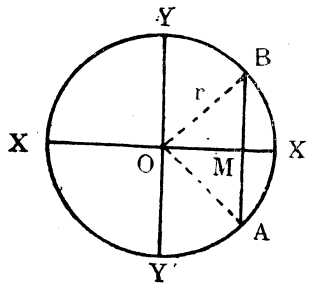


FIG. 73

Es evidente que:

$$AOB = \frac{360°}{n}.$$

Sea $OM = a_n$ la apotema de dicho lado, y tomemos dicha recta prolongada como eje de abscisas, siendo OY el eje de ordenadas. Será:

$$XOB = \frac{180°}{n}$$

$$\operatorname{sen} \widehat{XOB} = \frac{BM}{r} = \frac{AB}{2r}$$

o sea:

$$\operatorname{sen} \frac{180°}{n} = \frac{l_n}{2r} \qquad (1)$$

Análogamente:

$$\cos \widehat{XOB} = \frac{OM}{r}$$

o sea:

$$\cos \frac{180°}{n} = \frac{a_n}{r} \qquad (2)$$

Por división de (1) y (2) se obtiene:

$$\operatorname{tg} \frac{180°}{n} = \frac{l_n}{2a_n} \qquad (3)$$

168. **Valor exacto de las razones trigonométricas de 30°.** — Si suponemos n = 6 en el teorema anterior, sabemos por cursos anteriores que:

$$l_6 = r; \qquad a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}.$$

Será, por tanto:

$$\frac{180}{n} = 30^\circ$$

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{r\sqrt{3} : 2}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1 : 2}{\sqrt{3} : 2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \operatorname{cosec} 30^\circ = 2.$$

169. **Valor exacto de las razones trigonométricas de 60°.** — Haciendo n = 3 en las fórmulas (1), (2) y (3), y recordando que:

$$l_3 = r\sqrt{3}, \qquad a_3 = \frac{r}{2}$$

resulta:

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{r\sqrt{3}}{2r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{r : 2}{r} = \frac{1}{2} \qquad \sec 60^\circ = 2.$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3} : 2}{1 : 2} = \sqrt{3} \qquad \operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

170. **Valor exacto de las razones trigonométricas de 45°.** — Haciendo n = 4 en las fórmulas indicadas y sabiendo que:

$$l_4 = r\sqrt{2}; \qquad a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

sale:

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{r\sqrt{2}}{2r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \operatorname{ctg} 45^\circ = 1$$

$$\cos 45^\circ = \frac{r\sqrt{2}:2}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sec 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}:2}{\sqrt{2}:2} = 1 \qquad \operatorname{cosec} 45^\circ = \sqrt{2}.$$

171. **Variación del seno cuando el ángulo varía desde 0° a 360°.** — Supongamos (fig. 74) que en la circunferencia goniométrica el ángulo $XOP = \alpha$ crece desde 0° a 90°; el seno toma los valores M_1P_1,

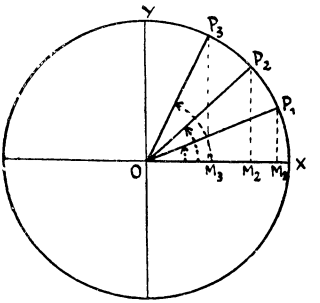


FIG. 74

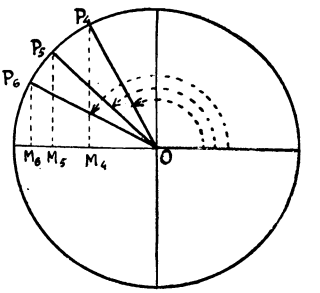


FIG. 75

M_2P_2, M_3P_3, y así sucesivamente, aproximándose a OY. Esto equivale a decir que cuando α crece, sen α crece. Cuando $\alpha = 90^\circ$, el seno es igual al radio, o sea a 1.

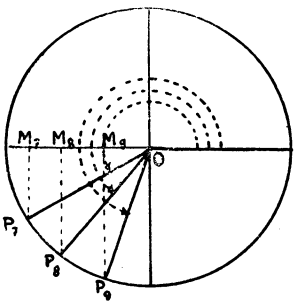


FIG. 76

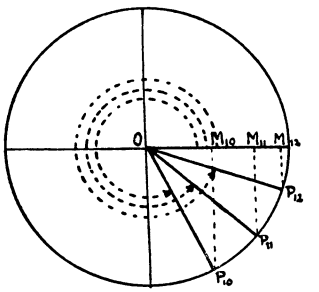


FIG. 77

Análogamente se prueba que cuando α crece desde 90° a 180°, sen α decrece desde 1 a 0 (fig. 75).

Cuando α crece desde 180° a 270°, sen α decrece desde 0 a -1 (figura 76).

Y si α crece desde 270° a 360°, sen α crece desde -1 a 0 (fig. 77).

Estos resultados se dan en la tabla siguiente:

α	0°	90°	180°	270°	360°
sen α	0	1	0	-1	0

Recordando que el seno de un ángulo viene representado por la *ordenada* del extremo del arco correspondiente y teniendo a la vista los resultados que figuran en esta tabla, tenemos la *gráfica*, llamada *sinusoide*, que resume todas esas variaciones (fig. 78). El eje de las abscisas representa el valor del ángulo en radianes. Así, $90° = \frac{\pi}{2} = 1'75$; $180° = \pi = 3'14$, etcétera. El eje de ordenadas representa el valor del seno. La circunferencia se ha dividido en 24 partes iguales.

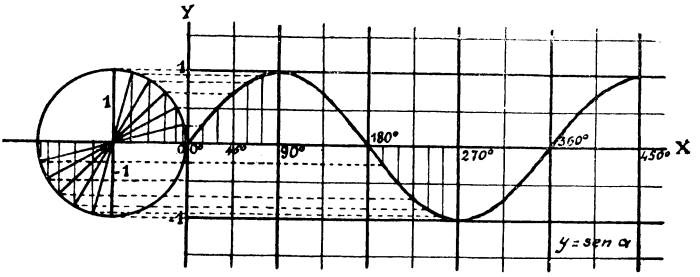


FIG. 78

172. **Variación del coseno.** — Refiriéndonos de nuevo a la figura 74, vemos que el coseno *decrece* y vale OM_1, OM_2, OM_3, etcétera, cuando el ángulo XOP varía desde 0° a 90°. Esto equivale a decir que cuando α *crece,* cos α *decrece.* Cuando $\alpha = 90°$, cos 90° se define como igual a cero.

Cuando OP coincide con OX, $\alpha = 0°$, y cos 0° se define como igual a 1.

Análogamente, es fácil ver que cuando α *crece* desde 90° a 180°, cos α decrece desde 0 a -1 (fig. 75).

Cuando α *crece* desde 180° a 270°, $\cos\alpha$ *crece* desde -1 a 0 (figura 76).

Debe observarse que los valores de las funciones seno y coseno no pueden ser mayores que 1 ni menores que -1. Para la representación de la función $y = \cos\alpha$, es decir de la *cosinusoide*, procederemos de modo análogo al seguido en la sinusoide (fig. 79).

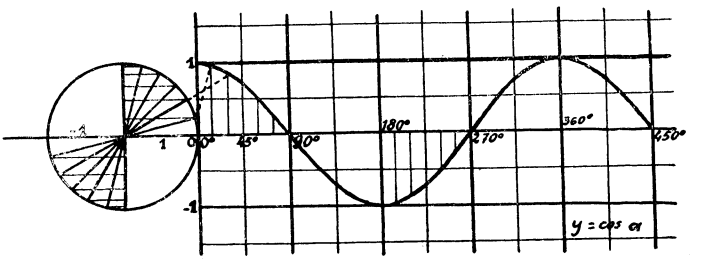


FIG. 79

Obsérvese que tanto la sinusoide como la cosinusoide son funciones continuas y periódicas (se repiten a partir de un cierto valor de α).

La siguiente tabla da la variación de $\cos\alpha$:

α	0°	90°	180°	270°	360°
$\cos\alpha$	1	0	-1	0	1

173. **Variaciones de las razones tangente y secante cuando el ángulo varía de 0° a 360°.** — Sabemos que $\text{tg}\, X\,O\,A_1$ viene representado (fig. 80) por el segmento A_1X. Cuando $X\,O\,A_1 = \alpha$ *decrece*, A_1X *decrece*.

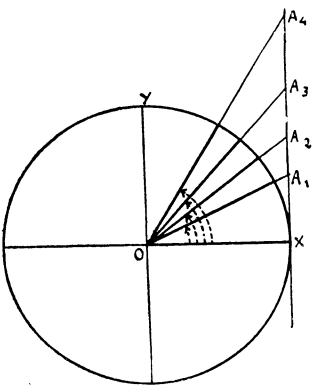


FIG. 80

Cuando α tiende a 0°, A_1X tiende a cero y $\text{tg}\,\alpha$ se define como igual a cero.

Cuando α *crece* desde 0° a 90°, $\text{tg}\,\alpha$ también *crece* desde 0 hasta un valor mayor que cualquier número dado.

Cuando α tiende a 90°, AX crece *sin límite*, y $\text{tg}\,\alpha$ no tiene un valor definido cuando $\alpha = 90°$. Expresamos esto simbólicamente por la expresión:

$$\text{tg}\, 90° = +\infty.$$

Pero esto no implica que tg 90° tenga un *valor definido,* sino que tg α, permaneciendo positiva, crece sin límite cuando α se aproxima a 90°.

Cuando α está en el segundo cuadrante (figura 81) y decrece aproximándose a 90°, tg α crece en valor absoluto sin límite, siendo siempre negativa. Esto se expresa simbólicamente por la igualdad:

$$\text{tg } 90^\circ = -\infty.$$

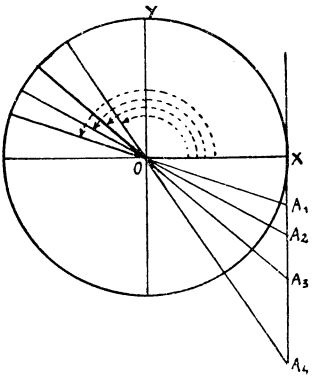


FIG. 81

Cuando α se aproxima a 180°, tg α tiende a cero. En el tercero y cuarto cuadrantes las variaciones son las mismas que en el primero y segundo.

Las variaciones de la función secante se pueden estudiar en las mismas figuras que la función tangente, ya que los valores de la secante son los segmentos O A_1, O A_2, etcétera. Luego la función secante no puede tener valores menores que 1.

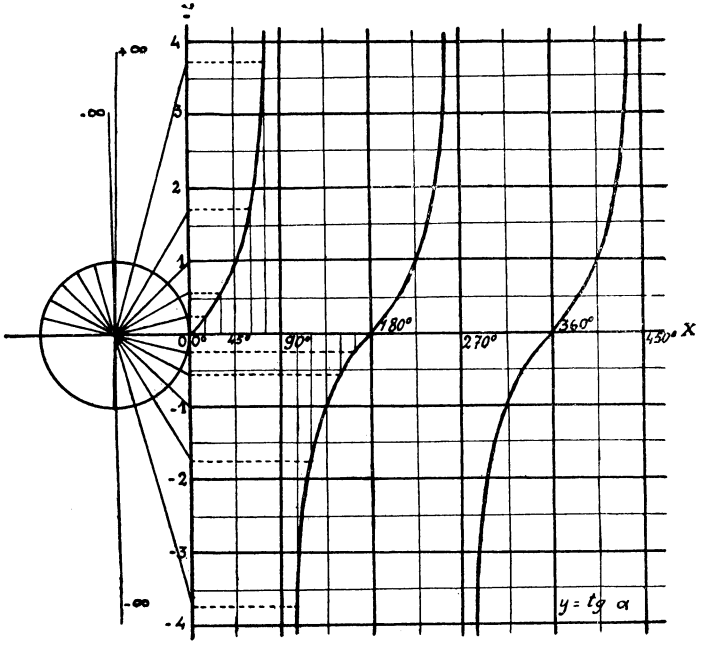


FIG. 82

Para determinar el signo de la función secante basta tener en cuenta que la secante es la inversa del coseno, y, por tanto, debe tener el mismo signo que éste.

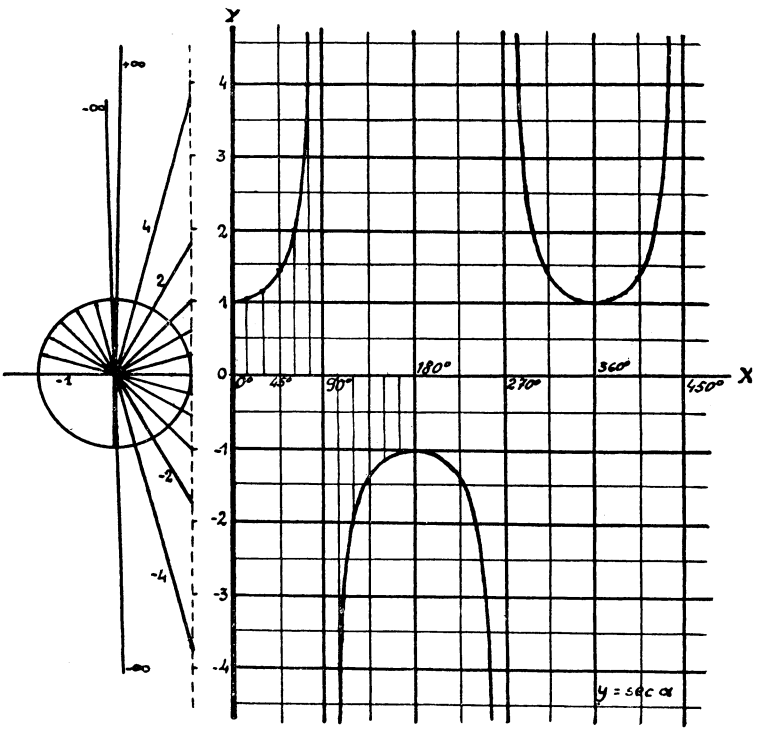


FIG. 83

Para la representación de las funciones $y = \text{tg}\,\alpha$ (tangentoide). $y = \sec\alpha$, véanse las figuras 82 y 83, fáciles de entender.

La siguiente tabla da los valores de $\text{tg}\,\alpha$ y $\sec\alpha$ desde $\alpha = 0°$ a $\alpha = 360°$.

Angulo	*Tangente*	*Secante*
0° a 90°	0 a ∞	1 a + ∞
90° a 180°	— ∞ a 0	— ∞ a — 1
180° a 270°	0 a + ∞	— 1 a — ∞
270° a 360°	— ∞ a 0	+ ∞ a + 1

174. **Variaciones de las funciones cotangente y cosecante cuando el ángulo varía de 0° a 360°.** — Sea $X\,O\,A_1$ un ángulo cualquiera, que designaremos por α. Sabemos que (fig. 84) cotg α = Y A_1, cosec α = O A_1.

La cotangente es negativa cuando α está en el segundo y cuarto cuadrantes, y positiva en el primero y tercero.

El signo de cosec α para todos los cuadrantes es el mismo que el de sen α.

La representación gráfica de estas funciones coincide con la de y = tg (90° — α), y = sec (90° — α) (curvas análogas a las figuras 82 y 83).

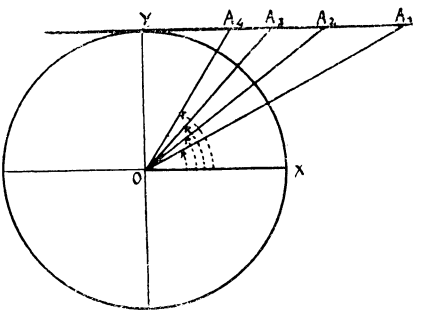


FIG. 84

El siguiente cuadro da las variaciones de cotg α y cosec α.

Angulo	*Cotangente*	*Cosecante*
0° a 90°	+ ∞ a 0	+ ∞ a 1
90° a 180°	0 a — ∞	+ 1 a + ∞
180° a 270°	+ ∞ a 0	— ∞ a — 1
270° a 360°	0 a — ∞	— 1 a — ∞

Hemos visto que el valor de las seis razones goniométricas varía al variar el ángulo α. Luego cada una de ellas es función de α. Por eso se les llama también *funciones goniométricas.*

EJERCICIOS

1. Representar geométricamente y hallar los valores de las funciones siguientes: sen 210°, cos 120°, cos 135°, cos 225°, sen 300°, sen 270°, sen 390° cos 720°, cos 810°.

Hacer ver, por construcción en la circunferencia goniométrica, que:

2. sen 150° = sen 30°.
3. cos 150° = — cos 30°.
4. sen 210° = — sen 30°.
5. cos 210° = — cos 30°.
6. sen 330° = — sen 30°.
7. cos 330° = cos 30°.

8. ¿Cuántos valores menores que 360° puede tener el ángulo x, si sen $x = +\frac{5}{7}$, y en qué cuadrantes están? Trazar la figura.

9. ¿Cuántos valores menores que 720° puede tener el ángulo x, si $\cos x = +\frac{2}{3}$, y en qué cuadrantes están los ángulos? Trazar la figura.

10. ¿En qué cuadrante está un ángulo, si el seno y coseno son ambos negativos? ¿Si el coseno y la tangente son ambos negativos?

11. Hacer ver que cuando α varía de 180° a 270°, $\operatorname{tg} \alpha$ varía desde 0 a $+\infty$.

12. Mostrar que cuando α varía desde 270° a 360°, $\operatorname{tg} \alpha$ varía desde $-\infty$ a 0.

13. Mostrar que cuando α varía desde 0° a 90°, $\sec \alpha$ crece de 1 a $+\infty$.

14. Mostrar que el signo de $\sec \alpha$ es el mismo que el de $\cos \alpha$.

15. Mostrar que cuando α varía desde 90° a 180°, $\sec \alpha$ varía desde $-\infty$ a -1.

16. Mostrar que cuando α varía desde 180° a 270°, $\sec \alpha$ varía desde -1 a $-\infty$.

17. Mostrar que cuando α varía desde 270° a 360°, $\sec \alpha$ varía de $+\infty$ a 1.

Representar en la circunferencia goniométrica las siguientes razones y hallar su valor:

18. tg 150°.
19. sec 120°.
20. tg 240°.
21. sec 315°.
22. sec 225°.
23. tg 330°.
24. tg 180°.
25. sec 180°.
26. sec 420°.

27. Describir las variaciones de $\operatorname{cotg} x$ y $\operatorname{cosec} x$ cuando x crece desde 0° a 360°. Explicarlo por medio de figuras.

Representar estas razones en la circunferencia goniométrica, y hallar su valor:

28. cotg 135°.
29. cosec 150°.
30. cosec 240°.
31. cotg 210°.
32. cotg 300°.
33. cosec 330°.
34. cotg 270°.
35. cosec 270°.
36. cosec 810°.

22

Reducción de las razones al primer cuadrante

175. **Angulos que difieren en un número entero de circunferencias.** — Si tenemos dos ángulos que difieren en un número entero de circunferencias y uno de ellos vale α, el otro valdrá $\alpha + 360° k$. Tales ángulos tienen el mismo origen y el mismo extremo. Luego, según las definiciones del número 162, *tendrán iguales sus funciones trigonométricas:*

$$\text{sen } (\alpha + 360° k) = \text{sen } \alpha \qquad \text{cotg } (\alpha + 360° k) = \text{cotg } \alpha$$
$$\cos (\alpha + 360° k) = \cos \alpha \qquad \sec (\alpha + 360° k) = \sec \alpha$$
$$\text{tg } (\alpha + 360° k) = \text{tg } \alpha \qquad \text{cosec } (\alpha + 360° k) = \text{cosec } \alpha$$

176. **Razones de ángulos suplementarios.** — Si el ángulo XOP (figura 85) vale α, su suplementario, el ángulo XOQ, valdrá $180° - \alpha$.

Se ve que $\widehat{XOP} = \widehat{QOX'}$, por ser ambos suplementos del $\widehat{XOQ}$. Además, $OP = OQ$. Luego los triángulos MOP y NOQ son iguales. Por tanto, en valor absoluto:

$$OM = ON, \quad MP = NQ$$

y siendo x' negativo:

$$x' = -x; \quad y' = y.$$

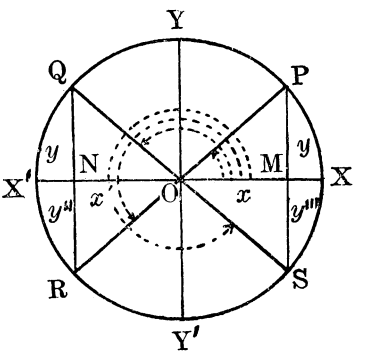


FIG. 85

De donde, según las definiciones del número 162:

$$\text{sen } (180° - \alpha) = \frac{y'}{r} = \frac{y}{r} = \text{sen } \alpha$$

$$\cos (180° - \alpha) = \frac{x'}{r} = \frac{-x}{r} = -\cos \alpha$$

y por división de éstas entre sí, o por la unidad, se obtiene:

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{tg\ (180^\circ - \alpha) = -\ tg\ \alpha} & \mathbf{sec\ (180^\circ - \alpha) = -\ sec\ \alpha} \\ \mathbf{cotg\ (180^\circ - \alpha) = -\ cotg\ \alpha} & \mathbf{cosec\ (180^\circ - \alpha) = cosec\ \alpha} \end{array}$$

O sea: *Las funciones goniométricas de igual nombre de dos ángulos suplementarios son iguales en valor absoluto pero sólo son de igual signo el seno y la cosecante (por depender sólo de la ordenada); las demás tienen el signo contrario.*

Ejemplos:

$$\operatorname{sen} 150^\circ = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg}\ 150^\circ = -\operatorname{tg}\ 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

177. **Razones de ángulos que difieren en 180°.** — Si el ángulo XOP vale α, el que difiere de él en 180°, o sea el XOR, valdrá $180^\circ + \alpha$. Se observa que (figura 85):

$$\widehat{XOP} = \widehat{X'OR}$$

pues sumando a ambos 180° se obtiene el mismo ángulo XOR. Luego los triángulos MOP y NOR son iguales, y en valor absoluto:

$$OM = ON \qquad MP = NR$$

o sea:

$$x' = -x; \qquad y'' = -y.$$

Por tanto:

$$\mathbf{sen\ (180^\circ + \alpha) = \frac{y''}{r} = \frac{-y}{r} = -\ sen\ \alpha}$$

$$\mathbf{cos\ (180^\circ + \alpha) = \frac{x'}{r} = \frac{-x}{r} = -\ cos\ \alpha.}$$

Análogamente, por división de éstas entre sí, o por la unidad, sale:

$$\begin{array}{l|l} \mathbf{tg\ (180^\circ + \alpha) = tg\ \alpha} & \mathbf{sec\ (180^\circ + \alpha) = -\ sec\ \alpha} \\ \mathbf{cotg\ (180^\circ + \alpha) = cotg\ \alpha} & \mathbf{cosec\ (180^\circ + \alpha) = -\ cosec\ \alpha} \end{array}$$

Las funciones goniométricas de igual nombre de dos ángulos que difieren en 180°, son iguales en valor absoluto, pero sólo son de igual

signo la tangente y la cotangente (por depender de las dos coordenadas), y las demás tienen signo contrario.

Ejemplos:

$$\operatorname{sen} 240^\circ = -\operatorname{sen} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} 240^\circ = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

178. **Razones de ángulos que suman 360°.** — Tales son el $\widehat{XOP}$ y el $\widehat{XOS}$ (fig. 85), de suerte que si el primero vale α, el segundo es $360^\circ - \alpha$. Se nota que $\widehat{XOP} = \widehat{SOX}$, pues a ambos les falta el ángulo cóncavo XOS para valer 360°. Por tanto, los triángulos MOP y MOS son iguales, siendo $SM = MP$, en valor absoluto. Luego:

$$y''' = -y$$

y, por tanto:

$$\mathbf{\operatorname{sen}(360^\circ - \alpha) = \frac{y'''}{r} = \frac{-y}{r} = -\operatorname{sen}\alpha}$$

$$\mathbf{\cos(360^\circ - \alpha) = \frac{x}{r} = \cos\alpha}$$

y por división de éstas entre sí, o por la unidad, obtenemos:

$$\mathbf{\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha} \qquad \mathbf{\sec(360^\circ - \alpha) = \sec\alpha}$$
$$\mathbf{\operatorname{cotg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha} \qquad \mathbf{\operatorname{cosec}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha}$$

Las funciones goniométricas de igual nombre de dos ángulos que suman 360° son iguales en valor absoluto, pero sólo son de igual signo el coseno y la secante (por depender sólo de la abscisa), y las demás tienen signo contrario.

Ejemplos:

$$\operatorname{sen} 315^\circ = -\operatorname{sen} 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 315^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 315^\circ = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1.$$

179. **Razones de ángulos opuestos.** — Sean los ángulos B A C y B A C′ (fig. 86) iguales y de signo contrario *(opuestos)*, cuyos valores son α y $-\alpha$. Observando que, según el número 165, los ángulos $360^\circ - \alpha$ y $-\alpha$ tienen iguales todas sus razones goniométricas, las fórmulas del número anterior podrán escribirse así:

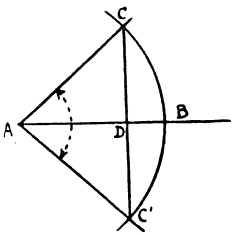


FIG. 86

$$\textbf{sen } (-\alpha) = \text{sen } (360^\circ - \alpha) = -\textbf{ sen } \alpha$$

$$\textbf{cos } (-\alpha) = \text{cos } (360^\circ - \alpha) = \textbf{ cos } \alpha$$

$$\textbf{tg } (-\alpha) = \text{tg } (360^\circ - \alpha) = -\textbf{ tg } \alpha$$

$$\textbf{cotg } (-\alpha) = \text{ctg } (360^\circ - \alpha) = -\textbf{ cotg } \alpha$$

$$\textbf{sec } (-\alpha) = \text{sec } (360^\circ - \alpha) = \textbf{ sec } \alpha$$

$$\textbf{cosec } (-\alpha) = \text{cosec } (360^\circ - \alpha) = -\textbf{ cosec } \alpha.$$

Las funciones goniométricas de igual nombre de dos ángulos opuestos son iguales en valor absoluto, pero sólo tienen igual signo el coseno y la secante.

180. **Reducción de las razones trigonométricas al primer cuadrante.** — Mediante las fórmulas demostradas en los números anteriores, las razones trigonométricas de cualquier ángulo pueden reducirse a las de un ángulo del primer cuadrante.

Ejemplos:

$$\text{sen } 127^\circ = \text{sen } (180^\circ - 53^\circ) = \text{sen } 53^\circ$$

$$\text{cos } 210^\circ = \text{cos } (180^\circ + 30^\circ) = -\text{cos } 30^\circ$$

$$\text{tg } 350^\circ = \text{tg } (360^\circ - 10^\circ) = -\text{tg } 10^\circ$$

$$\text{cotg } 800^\circ = \text{cotg } (2 \cdot 360^\circ + 80^\circ) = \text{cotg } 80^\circ.$$

181. **Determinación del ángulo por una de sus razones.** — Dada una razón trigonométrica cualquiera de un ángulo, éste no queda determinado por dicha razón, ya que existen dos ángulos menores de 360° que poseen la misma. Así:

A un valor dado positivo del seno o de la secante corresponden dos ángulos suplementarios, uno agudo y otro obtuso; si el valor dado es negativo, le corresponden dos ángulos situados en el tercero y cuarto cuadrante, respectivamente.

Ejemplo 1. — *Dado* $\text{sen } \alpha = \dfrac{1}{2}$, *hallar* α.

Solución: Considerando ángulos menores de 360°, será:

$$\alpha = 30^\circ \quad \text{y} \quad \alpha = 150^\circ.$$

Considerando ángulos mayores de 360°, tendremos, en general:

$$\alpha = \mathbf{30^\circ + 360^\circ k} \qquad \alpha = \mathbf{150^\circ + 360^\circ k} \tag{1}$$

Hay, pues, dos ángulos menores de 360° que tienen el mismo seno; y una infinidad de ellos, si se consideran ángulos mayores de 360°; éstos se obtienen dando a k, en las fórmulas (1), todos los valores enteros positivos o negativos.

A un valor dado positivo de la tangente o de la cotagente corresponden dos ángulos situados en el primer y tercer cuadrante, respectivamente, y que difieren en 180°*; si el valor dado es negativo, los ángulos estarán en el segundo y cuarto cuadrantes.*

Ejemplo 2. — *Dado* $tg\,\alpha = -1$, *hallar* α.

Solución: Los dos ángulos menores que 360° que tienen dicha función son 135° y $135^\circ + 180^\circ = 315^\circ$.

En general:

$$\alpha = 135^\circ + 360^\circ\,k = 135^\circ + 180^\circ \,.\, 2\,k$$

$$\alpha = 135^\circ + 180^\circ + 360^\circ\,k = 135^\circ + 180^\circ \,.\, (2\,k + 1).$$

Estas dos soluciones pueden resumirse en una sola fórmula:

$$\alpha = \mathbf{135^\circ + 180^\circ \,.\, k'}$$

donde k' toma todos los valores enteros, pares e impares.

A un valor dado positivo del coseno o de la secante corresponden dos ángulos opuestos situados en el primero y cuarto cuadrantes; si el valor dado es negativo, los ángulos estarán en el segundo y tercer cuadrante, respectivamente.

Ejemplo. — *Dado* $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, *hallar* α.

Solución: Será:

$$\alpha = 30^\circ \quad \text{y} \quad \alpha = -30^\circ$$

y en general:

$$\alpha = 30^\circ + 360^\circ\,k; \qquad \alpha = -30^\circ + 360^\circ\,k.$$

Estas dos fórmulas se resumen en una sola así:

$$\alpha = \pm\,\mathbf{30^\circ + 360^\circ\,k.}$$

182. **Razones trigonométricas de los ángulos complementarios.** —

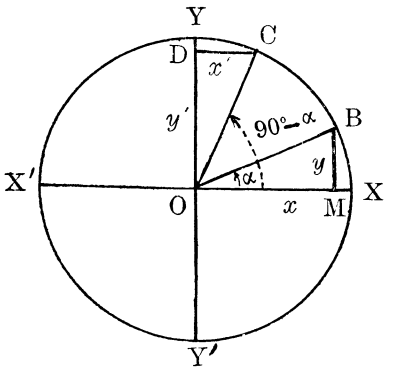


FIG. 87

Sean $\overset{\frown}{XOB}$ y $\overset{\frown}{XOC}$ dos ángulos complementarios, de modo que si $\overset{\frown}{XOB} = \alpha$, será $\overset{\frown}{XOC} = 90° - \alpha$ (figura 87). Evidentemente se verificará que $\overset{\frown}{XOB} = \overset{\frown}{COD}$, por tener el mismo complemento, el $\overset{\frown}{XOC}$, el primero por hipótesis y el segundo por construcción. Luego $\Delta MOB = \Delta COD$, y, por tanto:

$$y' = x; \quad x' = y.$$

Se tendrá pues:

$$\text{sen } (90° - \alpha) = \frac{y'}{r} = \frac{x}{r} = \cos \alpha$$

$$\cos (90° - \alpha) = \frac{x'}{r} = \frac{y}{r} = \text{sen } \alpha$$

y de estas dos se deduce:

$$\text{tg } (90° - \alpha) = \text{ctg } \alpha \qquad \text{sec } (90° - \alpha) = \text{cosec } \alpha$$
$$\text{ctg } (90° - \alpha) = \text{tg } \alpha \qquad \text{cosec } (90° - \alpha) = \text{sec } \alpha$$

Es decir, *cada función goniométrica de un ángulo agudo es igual a la cofunción del mismo nombre del ángulo complementario.*

Co-seno significa *seno del complemento,* y análogamente las otras co-funciones.

Por lo tanto, sen 60° = cos (90° — 60°) = cos 30°; sec 73° 30′ = cosec (90° — 73° 30′) = cosec 16° 30′, y así sucesivamente.

Luego *cualquier función de un ángulo entre* 45° *y* 90° *puede hallarse tomando la cofunción del ángulo complementario, que está comprendido entre* 0° *y* 45°.

Por consiguiente, no se necesita una tabla que dé directamente las funciones más allá de 45°, lo cual es una gran ventaja para su formación y manejo.

En el programa de este libro se encontrarán las tablas de los valores de las funciones goniométricas, así como la explicación de su manejo.

183. Razones trigonométricas de ángulos que difieren en 90°. — Sea $\overset{\frown}{XOB} = \alpha$ y $\overset{\frown}{BOD} = 90°$, con lo que $\overset{\frown}{XOD} = (90° + \alpha)$ (figura 88).

Los triángulos C O B y E O D son iguales por tener los ángulos C B O y E O D iguales, ya que tienen sus lados perpendiculares, y por ser rectángulos. Luego:

$$y' = x$$

$$x' = -y$$

$$\text{sen } (\alpha + 90°) = \frac{y'}{r} = \frac{x}{r} = \cos \alpha$$

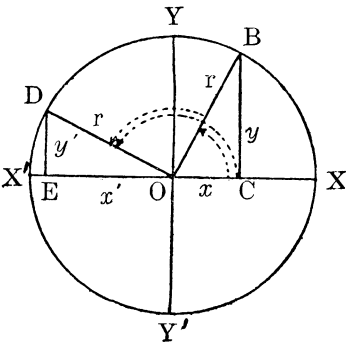


FIG. 88

$$\cos (\alpha + 90°) = \frac{x'}{r} = -\frac{y}{r} = -\text{sen } \alpha$$

y dividiendo estas dos entre sí:

$$\text{tg } (\alpha + 90°) = \frac{\cos \alpha}{-\text{sen } \alpha} = -\text{cotg } \alpha.$$

Análogamente, para la cotg $(\alpha + 90°)$ y las restantes. Por lo tanto, *si dos ángulos difieren en* 90°, *las funciones de uno son iguales, en valor absoluto, a las cofunciones del otro, pero sólo tienen igual signo el seno y la cosecante de* $\alpha + 90°$.

EJERCICIOS

1. Hallar los valores exactos de todas las funciones de los siguientes ángulos: 120°, 135°, 150°.

Demostrar que sen $(90° + \alpha) = \cos \alpha$ y cos $(90° + \alpha) = -\text{sen } \alpha$ para los siguientes casos:

2. Cuando α es obtuso.
3. Cuando α es mayor que 180° y menor que 270°.
4. Cuando α es mayor que 270° y menor que 360°.

Expresar las siguientes razones como funciones de ángulos agudos positivos:

5. sen (— 3°).
6. sen (— 86°).
7. cos (— 87°).
8. tg (— 100°).
9. tg (— 150°).
10. cotg (— 150°).
11. cotg (— 7'8°).
12. cotg (— 9'1°).
13. sec (— 30°).
14. sec (— 60°).
15. cosec (— 210°).
16. cosec (— 330°).

Expresar las siguientes razones como funciones de ángulos menores de 45°:

17. sen 100°.
18. sen 130°.
19. cos 111°.
20. cos 127°.
21. tg 119°.
22. tg 129°.
23. cotg 94° 1'.
24. cotg 98° 3'.
25. cos 95°.

26. Demostrar que los ángulos 42°, 138°, — 318°, 402° y — 222° tienen el mismo seno.

27. Hallar cuatro ángulos entre 0° y 720° que satisfagan a la ecuación $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

Expresar las siguientes razones como funciones de un ángulo agudo positivo:

28. cos 120°.
29. sen 150°.
30. cos 315°.
31. sen 300°.
32. tg 148°.
33. cotg 156°.
34. cotg 262°.
35. tg 325°.
36. cos 350°.
37. sen 187° 10′ 3″.
38. tg 322° 8′ 15″.
39. cos 232° 25′.

Demostrar las siguientes relaciones:

40. $\operatorname{tg} x \cos x = \operatorname{sen} x$.
41. $\cos^2 x = \operatorname{cotg}^2 x - \operatorname{cotg}^2 x \cos^2 x$.
42. $\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{tg}^2 x$.
43. $\cos^2 x + 2 \operatorname{sen}^2 x = 1 + \operatorname{sen}^2 x$.
44. $\operatorname{cotg}^2 x = \cos^2 x + \cos^2 x \operatorname{cotg}^2 x$.
45. $\operatorname{cotg}^2 x \sec^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$.
46. $\operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cotg}^2 x = 1$.
47. $\operatorname{sen} A + \cos A = (1 + \operatorname{tg} A) \cos A$.
48. $\dfrac{\operatorname{cotg} x}{\cos x} = \sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 x}$.
49. $\dfrac{\operatorname{cotg} x}{\cos x} = \sqrt{1 - \cos^2 x}$.
50. $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$.

En el triángulo A B C, demostrar las siguientes relaciones:

51. $\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} (B + C)$.
52. $\cos A = -\cos (B + C)$.
53. $\operatorname{tg} A = -\operatorname{tg} (B + C)$.
54. $\operatorname{sen} A = -\operatorname{sen} (2A + B + C)$.
55. $\operatorname{sen} B = -\operatorname{sen} (A + 2B + C)$.
56. $\cos C = -\cos (A + B + 2C)$.
57. $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} (2A + B + C)$.
58. $\operatorname{sen} A = -\cos (3/2\, A + 1/2\, B + 1/2\, C)$.
59. $\operatorname{sen} (1/2\, A + B) = \cos (1/2\, B - 1/2\, C)$.
60. $\cos A = \operatorname{sen} (3/2\, A + 1/2\, B + 1/2\, C)$.

Hallar x en las siguientes ecuaciones:

61. $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
62. $\cos x = -\dfrac{1}{2}$.
63. $\operatorname{tg} x = 1$.
64. $\operatorname{cotg} x = \sqrt{3}$.
65. $\operatorname{tg} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
66. $\operatorname{sen} x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
67. $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
68. $\operatorname{tg} x = 0$.
69. $\cos x = 0$.
70. $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$.
71. $\operatorname{sen} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
72. $\operatorname{sen} x = 1$.
73. $\cos x = 1$.
74. $\operatorname{cotg} x = 0$.

75. ¿Cuáles son las razones trigonométricas del tercer ángulo de un triángulo, si se sabe que los otros dos miden $\pi/6$ radianes y 45°? (No ha de hacerse uso de tablas.)

23

Relaciones de adición de las funciones goniométricas

184. **Seno, coseno y tangente de la suma de dos ángulos.** — Sean a y b los ángulos dados, y $\angle ABC = a + b$ (figura 89).

Para hallar sen $(a + b)$ se traza $CD \perp AB$.

Luego:

$$\operatorname{sen}(a + b) = \frac{DC}{BC}.$$

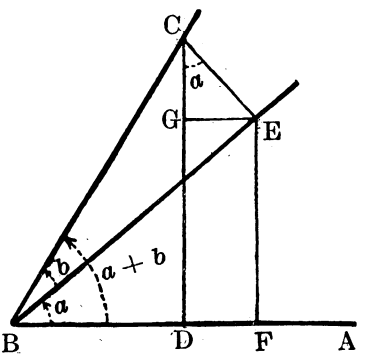


FIG. 89

Igualmente se traza $CE \perp BE$, $EF \perp AB$ y $EG \perp CD$, con lo cual $\angle GCE = a$, por tener sus lados respectivamente perpendiculares. Se tiene:

$$\operatorname{sen}(a + b) = \frac{DC}{BC} = \frac{DG + GC}{BC} = \frac{FE + GC}{BC} = \frac{FE}{BC} + \frac{GC}{BC} \qquad (1)$$

Pero en el triángulo FBE, $FE = BE \operatorname{sen} a$, y en el triángulo CGE, $GC = CE \cos a$.

Luego los dos quebrados de la relación (1) valen:

$$\frac{FE}{BC} = \frac{BE}{BC} \operatorname{sen} a = \cos b \operatorname{sen} a$$

$$\frac{GC}{BC} = \frac{CE}{BC} \cos a = \operatorname{sen} b \cos a.$$

Sustituyendo en la fórmula (1):

$$\textbf{sen } (a + b) = \textbf{sen } a \cos b + \cos a \textbf{ sen } b \qquad (2)$$

También:

$$\cos(a+b) = \frac{DB}{BC} = \frac{BF - DF}{BC} = \frac{BF}{BC} - \frac{DF}{BC} =$$

$$= \frac{BF}{BC} - \frac{GE}{BC} \qquad (3)$$

Pero en el triángulo F B E, B F = B E cos a, y en el triángulo C G E, G E = C E sen a.

Luego los dos quebrados de la relación (3) valen:

$$\frac{BF}{BC} = \frac{BE}{BC}\cos a = \cos b \cos a$$

$$\frac{GE}{BC} = \frac{CE}{BC}\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} a.$$

Sustituyendo en la igualdad (3):

$$\mathbf{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b} \qquad (4)$$

Dividiendo las igualdades (2) y (4), se obtiene:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$$

y dividiendo numerador y denominador por cos a cos b, resulta:

$$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a} + \dfrac{\operatorname{sen} b}{\cos b}}{1 - \dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \times \dfrac{\operatorname{sen} b}{\cos b}}$$

o sea:

$$\mathbf{\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}} \qquad (5)$$

Ejemplo. — *Calcular sen 75° y cos 75°.*

Solución:

Pongamos $75° = 45° + 30°$.

Luego:

$$\operatorname{sen} 75° = \operatorname{sen}(45° + 30°) = \operatorname{sen} 45° \cos 30° + \cos 45° \operatorname{sen} 30° =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Análogamente se calcula cos 75°, poniendo:

$$\cos 75° = \cos (45° + 30°) \cos 45° \cos 30° - \operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} 30° = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

185. **Seno, coseno y tangente de la diferencia de dos ángulos.** — Si en la fórmula (2) del número anterior sustituímos b por (— b), resulta:

$$\operatorname{sen} [a + (-b)] = \operatorname{sen} a \cos (-b) + \cos a \operatorname{sen} (-b).$$

Pero:

$$\cos (-b) = \cos b \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} (-b) = -\operatorname{sen} b$$

sustituyendo, obtenemos:

$$\textbf{sen (a — b) = sen a cos b — cos a sen b} \tag{6}$$

Reemplazando en la fórmula (4) del número anterior b por (— b), resulta:

$$\cos [a + (-b)] = \cos a \cos (-b) - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} (-b)$$

de donde:

$$\textbf{cos (a — b) = cos a cos b + sen a sen b} \tag{7}$$

Del mismo modo, si en la fórmula (5) del número anterior sustituímos b por (— b) se obtiene:

$$\operatorname{tg} \left[a + (-b) \right] = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} (-b)}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} (-b)}.$$

Pero:

$$\operatorname{tg} (-b) = -\operatorname{tg} b$$

luego:

$$\textbf{tg (a — b) = } \frac{\textbf{tg a — tg b}}{\textbf{1 + tg a tg b}} \tag{8}$$

186. **Funciones goniométricas del ángulo doble.** — Se obtienen estas funciones como una aplicación inmediata de las fórmulas del número 184. Así:

$$\operatorname{sen} 2a = \operatorname{sen} (a + a) = \operatorname{sen} a \cos a + \cos a \operatorname{sen} a = 2 \operatorname{sen} a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos (a + a) = \cos a \cos a - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$$

$$\operatorname{tg} 2a = \operatorname{tg} (a + a) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} a} = \frac{2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a}.$$

Tenemos, por tanto, las tres fórmulas siguientes:

$$\mathbf{sen\ 2\,a = 2\,sen\,a\,cos\,a} \tag{9}$$

$$\mathbf{cos\ 2\,a = cos^2\,a - sen^2\,a} \tag{10}$$

$$\mathbf{tg\ 2\,a = \frac{2\,tg\,a}{1 - tg^2\,a}} \tag{11}$$

187. **Razones trigonométricas del ángulo mitad.** — Si en la fórmula (10) hacemos $2\,a = \alpha$, o sea $a = \alpha : 2$, queda:

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} \tag{12}$$

Por otra parte sabemos que (número 165):

$$1 = \cos^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} \tag{13}$$

Restando ordenadamente la igualdad (12) de la (13), sale:

$$1 - \cos\alpha = 2\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}$$

o sea:

$$\mathbf{sen}\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \tag{14}$$

Sumando ordenadamente (12) y (13):

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

es decir:

$$\mathbf{cos}\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} \tag{15}$$

y dividiendo ordenadamente (14) y (15):

$$\mathbf{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} \tag{16}$$

188. **Suma y diferencia de senos y cosenos.** — Estas transformaciones tienen por objeto convertir las sumas y diferencias de senos

y cosenos en productos, con el fin de que se les pueda aplicar el cálculo logarítmico. En virtud de los números 184 y 185, tenemos:

$$\text{sen } (a + b) = \text{sen } a \cos b + \cos a \text{ sen } b$$
$$\text{sen } (a - b) = \text{sen } a \cos b - \cos a \text{ sen } b.$$

Sumando y restando estas igualdades, resulta:

$$\text{sen } (a + b) + \text{sen } (a - b) = 2 \text{ sen } a \cos b \quad (17)$$
$$\text{sen } (a + b) - \text{sen } (a - b) = 2 \cos a \text{ sen } b \quad (18)$$

Por los mismos números citados sabemos que:

$$\cos (a + b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b \quad (19)$$
$$\cos (a - b) = \cos a \cos b + \text{sen } a \text{ sen } b \quad (20)$$

Sumando y restando estas dos igualdades se obtiene:

$$\cos (a + b) + \cos (a - b) = 2 \cos a \cos b$$
$$\cos (a + b) - \cos (a - b) = -2 \text{ sen } a \text{ sen } b.$$

Haciendo:

$$\left.\begin{array}{l} a + b = A \\ a - b = B \end{array}\right\} \text{ se obtiene: } a = \frac{A + B}{2} \text{ y } b = \frac{A - B}{2}.$$

Sustituyendo estos valores en las fórmulas (17), (18), (19) y (20), resulta:

$$\textbf{sen A + sen B} = 2 \text{ sen } \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2} \quad (21)$$

$$\textbf{sen A - sen B} = 2 \cos \frac{A + B}{2} \text{ sen } \frac{A - B}{2} \quad (22)$$

$$\textbf{cos A + cos B} = 2 \cos \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2} \quad (23)$$

$$\textbf{cos A - cos B} = -2 \text{ sen } \frac{A + B}{2} \text{ sen } \frac{A - B}{2} \quad (24)$$

Ejemplo:

$$\cos 30° + \text{sen } 42° = \cos 30° + \cos (90° - 42°) = \cos 30° + \cos 48° =$$
$$= 2 \cos \frac{30° + 48°}{2} \cos \frac{30° - 48°}{2} = 2 \cos 39° \cos (-9°) = \textbf{2 cos 39° cos 9°.}$$

EJERCICIOS

Calcular el seno y el coseno de cada uno de los ángulos siguientes:

1. 285°.
2. 120°.
3. 135°.
4. 150°.
5. 105°.
6. 190°.
7. 165°.
8. 195°.
9. 210°.
10. 240°.

Demostrar las siguientes igualdades:

11. $\operatorname{sen}(45° + x) = \dfrac{(\cos x + \operatorname{sen} x)\sqrt{2}}{2}$.

12. $\cos(60° + x) = \dfrac{\cos x - \sqrt{3}\operatorname{sen} x}{2}$.

13. Desarrollar $\operatorname{sen}(x + y + z) = \operatorname{sen}[(x + y) + z]$.
14. Como en el ejercicio anterior, desarrollar $\cos(x + y + z)$.

15. Si $\operatorname{sen} x = \dfrac{12}{13}$ y $\operatorname{sen} y = \dfrac{4}{5}$, hallar $\operatorname{sen}(x + y)$.

Verificar las siguientes igualdades:

16. $\operatorname{cotg}(a + b) = \dfrac{\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b - 1}{\operatorname{cotg} b + \operatorname{cotg} a}$.

17. $\operatorname{tg}(45° + A) = \dfrac{1 + \operatorname{tg} A}{1 - \operatorname{tg} A}$.

18. $\operatorname{cotg}(45° + x) = \dfrac{\operatorname{cotg} x - 1}{\operatorname{cotg} x + 1}$.

19. Hallar $\operatorname{cotg}(30° + x)$.

Dados $\operatorname{tg} 30° = \operatorname{cotg} 60° = \sqrt{3}/3$, $\operatorname{cotg} 30° = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$, $\operatorname{tg} 45° = \operatorname{ctg} 45° = 1$, hallar los valores de las siguientes razones:

20. $\operatorname{tg} 15°$.
21. $\operatorname{cotg} 15°$.
22. $\operatorname{tg} 75°$.
23. $\operatorname{cotg} 75°$.
24. $\operatorname{tg} 90°$.
25. $\operatorname{cotg} 90°$.
26. $\operatorname{tg} 105°$.
27. $\operatorname{cotg} 105°$.
28. $\operatorname{tg} 150°$.
29. $\operatorname{cotg} 150°$.
30. $\operatorname{tg} 165°$.

31. Hallar el valor del seno y coseno de 15° haciendo $15° = 45° - 30°$.
32. Calcular el seno de 15° haciendo $15° = 60° - 45°$.

Aplicar los teoremas de sustracción a las siguientes expresiones:

33. $\operatorname{sen}(60° - y)$.
34. $\operatorname{sen}(90° - y)$.
35. $\operatorname{sen}(180° - y)$.
36. $\cos(45° - y)$.
37. $\cos(x - 90°)$.
38. $\cos(x - 180°)$.
39. $\operatorname{tg}(45° - y)$.
40. $\operatorname{tg}(x - 90°)$.
41. $\operatorname{tg}(x - 180°)$.
42. $\operatorname{cotg}(x° - 90°)$.
43. $\operatorname{cotg}(60° - y)$.
44. $\operatorname{cotg}(x - 180°)$.
45. $\operatorname{tg}(90° - x)$.

Verificar las siguientes expresiones:

46. $\operatorname{cotg}(a - b) = \dfrac{\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b + 1}{\operatorname{cotg} b - \operatorname{cotg} a}$.

47. $\operatorname{tg}(45° - a) = \dfrac{1 - \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg} a}$.

48. $\operatorname{cotg}(a - 45°) = \dfrac{\operatorname{cotg} a + 1}{\operatorname{cotg} a - 1}$.

49. Simplificar $\operatorname{sen}(x + y) \operatorname{sen}(x - y)$.
50. Simplificar $\cos(x + y) \cos(x - y)$.

51. Demostrar que $\operatorname{cotg} 2a = \dfrac{\operatorname{cotg}^2 a - 1}{2 \operatorname{cotg} a}$.

52. Demostrar que $\operatorname{tg} 3a = \dfrac{3 \operatorname{tg} a - \operatorname{tg}^3 a}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 a}$ (Poner $3a = 2a + a$).

Hallar $\operatorname{sen} 2x$ dados los siguientes valores de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$:

53. $\operatorname{sen} x = 1/2$, $\cos x = \dfrac{1}{2}\sqrt{3}$.

54. $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$, $\cos x = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$.

55. $\operatorname{sen} x = \dfrac{3}{5}$, $\cos x = \dfrac{4}{5}$.

56. $\operatorname{sen} x = \dfrac{5}{13}$.

57. $\operatorname{sen} x = \dfrac{12}{13}$.

58. Expresar $\operatorname{sen} 3x$ en función de $\operatorname{sen} x$.
59. Expresar $\cos 3x$ en función de $\cos x$.
60. Hallar $\cos 2x$ dados los siguientes valores de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$:

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \cos x = 1/2; \qquad \operatorname{sen} x = 3/5; \qquad \cos x = 4/5.$$

61. Hallar $\operatorname{tg} 2x$ dados los siguientes valores de $\operatorname{tg} x$:

$$\operatorname{tg} x = 0'3673; \qquad \operatorname{tg} x = 0'2701.$$

62. Por medio de las funciones de 45°, hallar sen 22'5°, cos 22'5° y tg 22'5°. Dado sen 30° = 1/2, hallar los valores de las siguientes razones trigonométricas:

63. sen 15°.
64. cos 15°.
65. tg 15°.
66. cotg 15°.
67. cotg 7½°.

Demostrar que las siguientes expresiones son identidades:

68. $\operatorname{sen} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

69. $\left[\operatorname{sen} \dfrac{a}{2} + \cos \dfrac{a}{2}\right]^2 = 1 + \operatorname{sen} a$.

70. $\cos 2x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

71. $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$.

72. $\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}$.

73. $\dfrac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \cos 2x} = \operatorname{tg} x$.

Expresar como producto:

74. sen 40° + sen 20°.
75. cos 80° — cos 20°.
76. cos 60° + cos 40°.
77. sen 30° — sen 80°.
78. cos 38° + cos 42°.
79. sen 35° + sen 25°.
80. sen 40° + sen 25°.
81. cos 17° — cos 36°.
82. cos 32° + cos 22°.
83. cos 10° + sen 17°.
84. sen 44° + cos 40°.
85. sen 4 α — sen 2 α.
86. sen α + sen α.
87. cos 5 α + cos 9 α.
88. $\operatorname{sen} \dfrac{1}{2} \alpha + \operatorname{sen} \alpha$.
89. sen 5 a + sen 3 a.
90. cos 40° + cos 20°.
91. $\dfrac{\operatorname{sen} 6a + \operatorname{sen} 2a}{\cos 6a + \cos 2a}$.

24

Identidades y ecuaciones trigonométricas

189. **Identidades trigonométricas.** — No hay regla general para demostrar que una igualdad entre funciones goniométricas es una identidad. De ordinario hay que realizar algunas transformaciones basándose en las fórmulas demostradas en las lecciones anteriores.

Ejemplo 1. — *Demostrar la identidad:*

$$\operatorname{tg}(45^\circ + a) - \operatorname{tg}(45^\circ - a) = 2 \operatorname{tg} 2a.$$

Solución: Se tiene (números 84, 85 y 70):

$$\operatorname{tg}(45^\circ + a) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} a} = \frac{1 + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a};$$

$$\operatorname{tg}(45^\circ - a) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} a} = \frac{1 - \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg} a}.$$

Restando:

$$\operatorname{tg}(45^\circ + a) - \operatorname{tg}(45^\circ - a) = \frac{1 + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a} - \frac{1 - \operatorname{tg} a}{1 + \operatorname{tg} a} =$$

$$= \frac{(1 + \operatorname{tg} a)^2 - (1 - \operatorname{tg} a)^2}{(1 - \operatorname{tg} a)(1 + \operatorname{tg} a)} = \frac{2 \cdot 2 \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg}^2 a} = 2 \operatorname{tg} 2a,$$

en virtud del número 186.

Ejemplo 2. — *Demostrar que cuando* $a + b + c = 180^\circ$, *es:*

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c.$$

Solución: Los ángulos $(a + b)$ y c son suplementarios. Por tanto según el número 176.

$$\operatorname{tg}(a + b) = -\operatorname{tg} c$$

o sea:

$$\frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b} = -\operatorname{tg} c$$

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b = -\operatorname{tg} c + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b \cdot \operatorname{tg} c$$

y finalmente trasponiendo al primer miembro $-\operatorname{tg} c$ resulta la identidad pedida.

Ejemplo 3. — *Demostrar la identidad*

$$\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{1 - \operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}.$$

Solución: Multiplicando los dos términos del primer miembro por cos x, queda:

$$\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x} = \frac{(\cos x - \operatorname{sen} x)^2}{(\cos x + \operatorname{sen} x)(\cos x - \operatorname{sen} x)} =$$

$$\frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x - 2 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{1 - \operatorname{sen} 2x}{\cos 2x}.$$

190. **Ecuaciones trigonométricas.** — En la resolución de ecuaciones trigonométricas no hay método general aplicable a todos los casos, pero son de gran utilidad las siguientes indicaciones:

1.° *Si intervienen funciones de suma o diferencia de dos ángulos, se reducen dichas funciones a otras de ángulo sencillo.*

Así, si entra en la ecuación sen (x + y), se sustituye por su igual sen x cos y + cos x sen y.

Análogamente se reemplaza cos 2 x por $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$, y las funciones de $\frac{x}{2}$ por las de x.

2.° *Si intervienen varias funciones, se reducen a la misma función.*

No siempre es conveniente realizar esto, pero frecuentemente se puede reducir la ecuación de modo que contenga sólo senos y cosenos, o tangentes y cotangentes, después de lo cual la solución puede ser fácil.

3.° *Si es posible, para resolver la ecuación final se descompone en factores.*

4.° *Comprobar los resultados en la ecuación dada.*

Ejemplo 1. — *Resolver la ecuación cos x = sen 2 x.*

Solución: En virtud del número 186:

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x;$$
$$\therefore \cos x = 2 \operatorname{sen} \cos x;$$
$$\therefore (1 - 2 \operatorname{sen} x) \cdot \cos x = 0;$$

de donde:

$$\cos x = 0; \qquad x = \pm 90^\circ + 360^\circ k;$$

o también;

$$1 - 2 \operatorname{sen} x = 0; \qquad \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}.$$

$$x = 30^\circ + 360^\circ k; \qquad x = 150^\circ + 360^\circ k.$$

Cada uno de estos valores satisface a la ecuación dada.

Ejemplo 2. — *Resolver la ecuación siguiente:*

$$\cos 2x + 3 \operatorname{sen} x = 2.$$

Solución: En virtud del número 186:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x.$$

Sustituyendo en la ecuación dada, tenemos:

$$1 - 2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x = 2.$$

Luego:

$$2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0,$$

ecuación de segundo grado en sen x, cuyas raíces son:

$$\operatorname{sen} x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4}$$

o sea:

$$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}; \quad \operatorname{sen} x = 1.$$

Por tanto:

$$\mathbf{x = 30^\circ + 360^\circ k; \quad x = 150^\circ + 360^\circ k; \quad x = 90^\circ + 360^\circ k.}$$

Ejemplo 3. — *Resolver la ecuación:*

$$\operatorname{tg} x = 5 \operatorname{sen} x.$$

Solución: Sabemos que:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

Sustituyendo, sale:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 5 \operatorname{sen} x;$$

de donde:

$$\operatorname{sen} x = 5 \operatorname{sen} x \cos x$$

o sea:

$$\operatorname{sen} x (1 - 5 \cos x) = 0.$$

Luego:

$$\operatorname{sen} x = 0;$$

o también:

$$1 - 5 \cos x = 0; \quad \cos x = \frac{1}{5}.$$

De donde:

$$\mathbf{x = 180^\circ k; \quad x = \pm 78^\circ + 360^\circ k.}$$

Ejemplo 4. — *Resolver la ecuación:*

$$\textit{sen } x + \textit{tg } x = 3 \textit{ cos } x \textit{ sen } x.$$

Solución: Sustituyendo tg x por su valor, tenemos:

$$\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 3 \cos x \operatorname{sen} x;$$

de donde:

$$\operatorname{sen} x \left(1 + \frac{1}{\cos x} - 3 \cos x\right) = 0.$$

Luego:

$$\operatorname{sen} x = 0;$$

o bien:

$$1 + \frac{1}{\cos x} - 3 \cos x = 0.$$

La primera da:

$$\mathbf{x = 180^\circ k}$$

y la segunda:

$$3 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

Para simplificar, hagamos en esta ecuación $\cos x = X$; luego:

$$3 X^2 - X - 1 = 0;$$

de donde:

$$X = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 12}}{6} = \frac{1 \pm 3'606}{6}.$$

Por tanto:

$$\cos x = 0'7677 \quad \text{o} \quad \cos x = -0'4343.$$

de donde:

$$\mathbf{x = \pm 39^\circ 51' + 360^\circ k; \quad x = \pm 115^\circ 45' + 360^\circ k.}$$

Tenemos que arc cos 0'4343 = 60° 15' (*), y, por tanto, los valores de x son:

$$180^\circ - 64\ 15' = 115^\circ\ 45' \text{ y } -115^\circ\ 45'.$$

191. **Sistemas de ecuaciones trigonométricas.** — Los sistemas de ecuaciones goniométricas se resuelven por los mismos principios que los sistemas de ecuaciones algebraicas.

Ejemplo 1. — *Resolver el sistema siguiente:*

$$\begin{cases} x \operatorname{sen} a + y \operatorname{sen} b = m; & (1) \\ x \cos a + y \cos b = n. & (2) \end{cases}$$

De (1), multiplicando por cos a:

$$x \operatorname{sen} a \cos a + y \operatorname{sen} b \cos a = m \cos a. \qquad (3)$$

De (2), multiplicando por sen a:

$$x \operatorname{sen} a \cos a + y \cos b \operatorname{sen} a = n \operatorname{sen} a \qquad (4)$$

De (3) y (4), restando:

$$y \operatorname{sen} b \cos a - y \cos b \operatorname{sen} a = m \cos a - n \operatorname{sen} a;$$

o sea:

$$y \operatorname{sen} (b - a) = m \cos a - n \operatorname{sen} a;$$

(*) de la igualdad $y = \cos x$ deducimos que "x es el arco cuyo coseno es y"; lo que representa así: $x = \text{arc cos } y$.

luego:

$$y = \frac{m \cos a - n \operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}(b - a)}.$$

Análogamente:

$$x = \frac{n \operatorname{sen} b - m \cos b}{\operatorname{sen}(b - a)}.$$

Ejemplo 2. — *Resolver el sistema siguiente:*

$$\begin{cases} y \operatorname{sen} x = \sqrt{3} & (5) \\ y \cos x = 1 & (6) \end{cases}$$

Solución: Dividiendo las dos ecuaciones:

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$$

$$\therefore\ x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = 60^\circ + 180^\circ k.$$

Elevando (5) y (6) al cuadrado y sumando:

$$y^2 (\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x) = 3 + 1 = 4.$$

Luego:

$$y^2 = 4; \quad y = \pm 2.$$

Ejemplo 3. — *Resolver el siguiente sistema:*

$$\begin{cases} \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 3/2 \\ \cos x + \cos y = \sqrt{3}/2. \end{cases}$$

Solución: En virtud del número 188:

$$\begin{cases} 2 \operatorname{sen} \dfrac{x + y}{2} \cdot \cos \dfrac{x - y}{2} = \dfrac{3}{2} & (7) \\ 2 \cos \dfrac{x + y}{2} \cdot \cos \dfrac{x - y}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} & (8) \end{cases}$$

Dividiendo:

$$\operatorname{tg} \frac{x + y}{2} = \frac{3 : 2}{\sqrt{3} : 2} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \qquad (9)$$

Conociendo el valor de la tangente, podemos ahora hallar el del seno. En virtud del número 166 será:

$$\operatorname{sen} \frac{x + y}{2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1 + 3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (7) queda:

$$\pm \sqrt{3} \cos \frac{x - y}{2} = \frac{3}{2}$$

o sea:

$$\cos\frac{x-y}{2} = \pm\frac{3}{2\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad (10)$$

De las ecuaciones (9) y (10) se obtiene:

$$\frac{x+y}{2} = 60^\circ + 180^\circ k$$

$$\frac{x-y}{2} = \pm 30^\circ + 180^\circ k.$$

Sumando y restando estas dos:

$$\mathbf{x = 90^\circ + 360^\circ k}$$
$$\mathbf{y = 30^\circ + 360^\circ k}$$

o bien los mismos valores invertidos.

EJERCICIOS

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $2 \operatorname{sen} x + 1 = 0.$
2. $\cos 2x = \operatorname{sen} x.$
3. $\operatorname{sen}(x + 45^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$
4. $\operatorname{sen} x + \cos 2x = 1.$
5. $\operatorname{cosec} x - \sqrt{3} = \operatorname{cotg} x.$
6. $\cos x = \cos^2 x.$
7. $\cos 2x + \cos x = 0.$
8. $\cos x \cos 2x + 2\cos^2 x = 0.$
9. $\operatorname{tg}(45^\circ + x) + \operatorname{tg}(45^\circ - x) = 4.$
10. $\cos 2x + \operatorname{sen} x = 4 \operatorname{sen}^2 x.$
11. $\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x = 1.$
12. $\operatorname{tg} x \sec x = \sqrt{2}.$
13. $\operatorname{cotg}^2 x - \operatorname{cosec} x = 1.$
14. $3\cos^2 x = 2 - \operatorname{sen} x.$
15. $3\cos x = 4 \sec x - 5.$
16. $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 2x.$
17. $3\operatorname{tg}^2 x = 1 + 2\operatorname{tg} x.$
18. $3\sec^2 x - 7\operatorname{tg}^2 x = \operatorname{tg} x.$
19. $\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2} = \operatorname{sen} x + \cos x.$
20. $4\cos 2x + 3\cos x = 1.$
21. $6\cos 2x + 6\operatorname{sen}^2 x = 5 + \operatorname{sen} x.$
22. $3\cos 2x + \operatorname{sen} x(3 \operatorname{sen} x + 5) = 5.$
23. $2 \operatorname{sen} 2x = \cos x.$
24. $\cos 5x + \cos 3x = \sqrt{2}\cos 4x.$
25. $\cos 3x + \operatorname{sen} x = \cos x.$
26. $3\operatorname{tg} x = 2\cos x.$
27. $\operatorname{tg} x + 3\operatorname{cotg} x = 4.$
28. $2\operatorname{sen}^2 x - 4 = 5\cos x.$
29. $2 \operatorname{sen} x + \sqrt{3}\operatorname{tg} x = 0.$
30. $4 \operatorname{sen}\frac{x}{2} + 2\cos x = 3.$

Resolver los siguientes sistemas, siendo las incógnitas x, y:

31. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \operatorname{sen} a.$
    $\cos x + \cos y = 1 + \cos a.$
32. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y = 5/4.$
    $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 y = 3/4.$
35. $\operatorname{sen}^2 x + y = 2.$
    $\cos^2 x + y = 1.$
36. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1.$
    $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 1.$

33. $\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = 0'7038.$
$\cos x - \cos y = 0'7245.$

34. $x \operatorname{sen} 21^\circ + y \cos 44^\circ = 179'70.$
$x \cos 21^\circ + y \operatorname{sen} 44^\circ = 232'30.$

39. $y \operatorname{sen} x = 92'344.$
$y \cos x = 205'309.$

40. $y \operatorname{sen} (x - 19^\circ\, 18') = 59'4034.$
$y \cos (x - 30^\circ\, 54') = 147'9347.$

41. $\operatorname{sen} x = \sqrt{2} \operatorname{sen} y.$
$\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \operatorname{tg} y.$

42. $\operatorname{sen}^2 x + 2 \cos y = 2.$
$\cos x - \cos^2 y = 0.$

43. $1 - \operatorname{sen} x = y.$
$1 + \operatorname{sen} x = a.$

44. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \dfrac{3}{2}.$

$\cos \dfrac{x - y}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

37. $\cos x + \cos y = 1.$
$\cos 2x + \cos 2y = 0.$

38. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1.$
$\cos x + \cos y = 1.$

45. $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 1.$
$\cos x + \cos y = \sqrt{3}.$

46. $\operatorname{sen} x \,.\, \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{4}.$

$\cos x \,.\, \cos y = \dfrac{1}{4}.$

47. $\operatorname{sen}^2 x = \cos 2y.$
$\cos^2 y = \operatorname{sen} 2x.$

48. $\operatorname{sen} x - \cos y = 0.$

$\operatorname{sen}^2 x + \cos y = \dfrac{3}{4}.$

49. Resolver $\cos 3x$ en función de $\cos x$. Aplicar el resultado obtenido para determinar todas las soluciones de la ecuación:

$$\cos 3x = \cos x.$$

50. Dada la ecuación:

$$\operatorname{cotg} x - \operatorname{tg} x = \sqrt{12},$$

se pide: 1.°, el valor de $\operatorname{tg} x$; 2.°, razones trigonométricas del ángulo $2x$; 3.°, valores de x.

Resolver las siguientes ecuaciones:

51. $2 \cos x = \sec x.$
52. $4 \operatorname{sen} x = \operatorname{cosec} x.$
53. $\operatorname{sen}^2 x = 3 \cos^2 x.$
54. $2 \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = \dfrac{3}{2}.$
55. $3 \operatorname{tg}^2 x - \sec^2 x = 1.$
56. $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x = 2.$
57. $\operatorname{tg} x = 2 \operatorname{sen} x.$
58. $\sec x = \sqrt{2} \operatorname{tg} x.$
59. $\operatorname{sen}^2 x - \cos x = \dfrac{1}{4}.$
60. $\operatorname{tg}^2 x - \sec x = 1.$
61. $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{cosec}^2 x = 3.$
62. $\operatorname{sen} x + \sqrt{3} \cos x = 2.$

63. Dado $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 - 1 = (\operatorname{sen} x - \cos x)^2 + 1$, hallar x.
64. Dado $2 \operatorname{sen} x = \cos x$, hallar $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$.
65. Dado $5 \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$, hallar $\cos x$ y $\sec x$.
66. Dado $4 \operatorname{sen} x = \operatorname{tg} x$, hallar $\operatorname{sen} x$ y $\operatorname{tg} x$.

67. De la fórmula $\operatorname{tg} x = \pm \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}}$, hallar la condición para que $\operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x$.

Resolver las ecuaciones siguientes; es decir, hallar el valor de x si:

68. $\cos x = \sec x$.
69. $\cos x = \operatorname{sen} x$.
70. $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} x$.
71. $2 \cos x + \sec x = 3$.
72. $\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x$.
73. $2 \operatorname{sen} x + \operatorname{cotg} x = 1 + 2 \cos x$.
74. $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{tg}^2 x = 3 \cos^2 x$.

Demostrar las siguientes identidades:

75. $(\operatorname{cosec} C + \operatorname{cotg} C)(\operatorname{cosec} C - \operatorname{cotg} C) = 1$.
76. $(\operatorname{tg} C + \operatorname{cotg} C) \operatorname{sen} C \cos C = 1$.
77. $(\operatorname{sen} C - \cos C)^2 + (\operatorname{sen} C + \cos C)^2 = 2$.
78. $\sec^2 C - \operatorname{tg}^2 C = \operatorname{sen}^2 C + \cos^2 C$.
79. $\operatorname{cosec}^2 C - \operatorname{cotg}^2 C = \operatorname{sen}^2 C + \cos^2 C$.
80. $\cos^4 C - \operatorname{sen}^4 C = 2 \cos^2 C - 1$.
81. $(\cos x + \operatorname{sen} x)^2 = \operatorname{sen} 2x + 1$.
82. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y (\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y)$.
83. $(\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)^2 = \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x$.

84. $\operatorname{cotg} \dfrac{x}{2} - \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = 2 \operatorname{cotg} x$.

85. $\left(\operatorname{sen} \dfrac{x}{2} - \cos \dfrac{x}{2}\right)^2 = 1 - \operatorname{sen} x$.

86. $\dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\cos x + \cos y} = \operatorname{tg} \dfrac{1}{2} (x - y)$.

87. $\operatorname{sen} \dfrac{3x}{2} - \operatorname{sen} \dfrac{x}{2} = 2 \cos x \operatorname{sen} \dfrac{x}{2}$.

88. Calcular x, sabiendo que $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{\sqrt{12} - \sqrt{3}}{\sqrt{12} + \sqrt{3}}$.

25

Resolución de triángulos rectángulos

192. **Relaciones en el triángulo rectángulo.** — Sea el triángulo B A C (fig. 90). De las definiciones del número 162, aplicadas al triángulo rectángulo, se deduce:

$$\text{sen } C = \frac{c}{a}; \text{ de donde } \mathbf{c = a \text{ sen } C} \quad (1)$$

$$\cos C = \frac{b}{a}; \text{ de donde } \mathbf{b = a \cos C} \quad (2)$$

$$\text{tg } C = \frac{c}{b}; \text{ de donde } \mathbf{c = b \text{ tg } C} \quad (3)$$

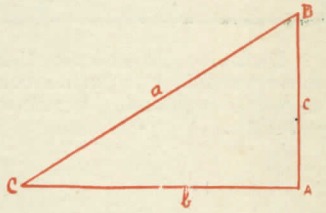


FIG. 90

$$\text{cotg } C = \frac{b}{c}; \text{ de donde } \mathbf{b = c \text{ cotg } C} \quad (4)$$

También conocemos las dos siguientes:

$$\hat{C} + \hat{B} = 90^\circ \quad (5)$$

$$b^2 + c^2 = a^2 \quad (6)$$

Las cuatro primeras relaciones pueden expresarse así:

1.° *Un cateto es igual al producto de la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto al mismo cateto.*

2.° *Un cateto es igual al producto de la hipotenusa por el coseno del ángulo adyacente al mismo cateto.*

3.° *Un cateto es igual al producto del otro cateto por la tangente del ángulo opuesto al primero.*

4.° *Un cateto es igual al producto del otro cateto por la cotangente del ángulo adyacente al primero.*

Con estas seis relaciones entre los tres lados y los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo se puede determinar éste en los cuatro casos siguientes:

193. **Primer caso: Dados un ángulo agudo y la hipotenusa.** — Supongamos que en el triángulo de la figura 91 conocemos la hipotenusa a y el ángulo agudo C, y tenemos que hallar los restantes elementos. La solución viene dada en el siguiente cuadro:

Datos	*Incógnitas*	*Fórmulas*
a	$\hat{B}$	$\hat{B} = 90° - \hat{C}$
$\hat{C}$	b	$b = a \cos C$
	c	$c = a \operatorname{sen} C$

Ejemplo: *Un caballo tira de una vagoneta con una fuerza de 75 kg., en una dirección que forma con el horizonte un ángulo de* 35° (fig. 91). *Determinar la componente horizontal C A, la vertical A B y el ángulo que forma con ésta.*

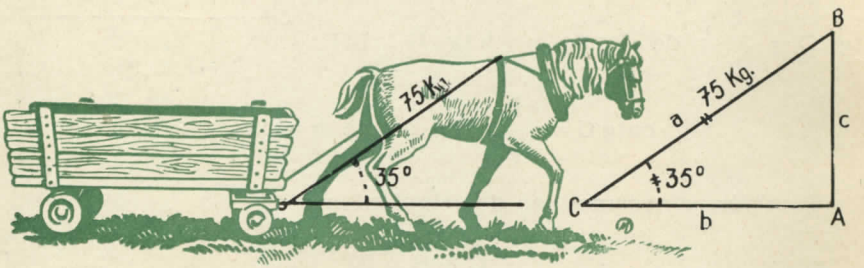


FIG. 91

Solución:

Datos	*Incógnitas*	*Fórmulas*
$a = 75$	$\hat{B}$	$\hat{B} = 90° - 35°$
$\hat{C} = 35°$	b	$b = 75 \cos 35°$
	c	$c = 75 \operatorname{sen} 35°$
Resultados:	$\hat{B} = 90° - 35° = \mathbf{55°}$	
	$b = 75 \,.\, 0'8192 = \mathbf{61'44\ Kg.}$	
	$c = 75 \,.\, 0'5736 = \mathbf{43\ Kg.}$	

194. **Segundo caso: Dados un cateto y un ángulo agudo.** — Supongamos conocidos en el triángulo A B C de la figura 92 el cateto *b* y el ángulo agudo C, y que hemos de hallar los restantes elementos del triángulo. La solución se da en el siguiente cuadro:

Datos	*Incógnitas*	*Fórmulas*
b	$\hat{B}$	$\hat{B} = 90° - \hat{C}$
$\hat{C}$	c	$c = b \operatorname{tg} C$
	a	$a = \dfrac{b}{\cos C}$

La tercera fórmula se deduce de que $b = a \cos C$.

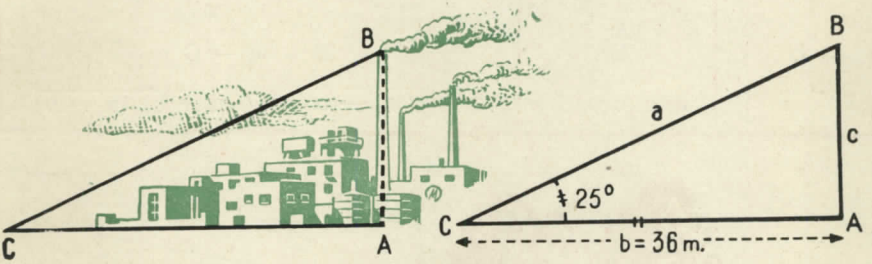


FIG. 92

Ejemplo: *El ángulo de elevación del extremo de una chimenea, observado desde un punto del suelo horizontal situado a* 36 *m. del pie de la chimenea, es de* 25°. *Hállese la altura de la chimenea* (figura 92).

Definición: Angulo de elevación o depresión de un punto es el ángulo formado por la visual al punto con el plano horizontal que pasa por el ojo del observador. Así, en la figura 93 $\widehat{DAB}$ es el ángulo de elevación del punto B para un observador situado en A, y $\widehat{CBA}$ es el ángulo de depresión del punto A para un observador situado en B.

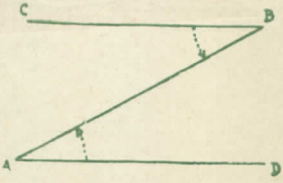


FIG. 93

Solución:

Datos	*Incógnitas*	*Fórmulas*
$b = 36$ $\hat{C} = 25^\circ$	c	$c = 36 \text{ tg } 25^\circ$
Resultado: $c = 36.0'4663 =$ **16'787 m.**		

195. **Tercer caso: Dados la hipotenusa y un cateto.** — En el triángulo A B C (fig. 94) conocemos C B = a y C A = b, deseando hallar los restantes elementos. La solución va incluída en el siguiente cuadro:

Datos	*Incógnitas*	*Fórmulas*
a	$\hat{C}$	$\cos C = \dfrac{b}{a}$
b	$\hat{B}$	$\hat{B} = 90^\circ - C$
	c	$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{(a + b)(a - b)}$

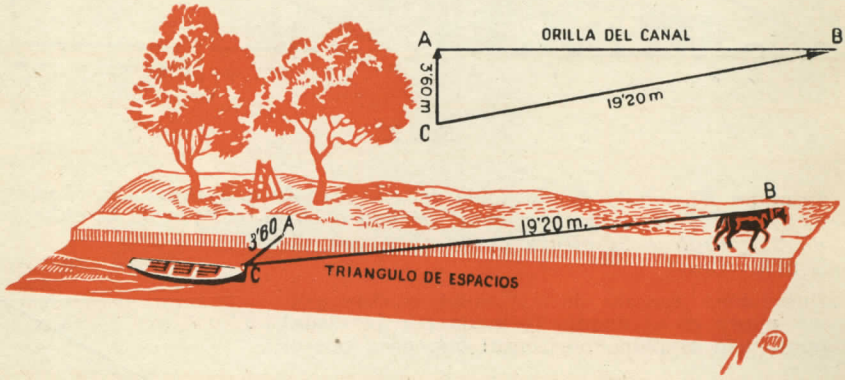


FIG. 94

En el cálculo de c es preferible la forma $\sqrt{(a + b)(a - b)}$ porque simplifica el trabajo.

Ejemplo. — *Un bote arrastrado a lo largo de un canal se halla a* 3'60 *m. de la orilla, siendo la longitud del cable que lo sujeta de* 19'20 *m. El caballo empleado tira con una fuerza de* 200 *kg. Hállese la fuerza efectiva que hace avanzar al bote y la fuerza que tiende a llevarle a la orilla.*

FIG. 95

En este problema hay que resolver dos triángulos: el *de espacios* (figura 94) y el *de fuerzas* (figura 95).

El triángulo de espacios corresponde al tercer caso (figura 94):

Datos	*Incógnitas*	*Fórmulas*
a = 19'20	$\hat{C}$	$\cos \hat{C} = \dfrac{3'60}{19'20}$
b = 3'60	$\hat{B}$	$\hat{B} = 90° - \hat{C}$
	c	$c = \sqrt{(19'20+3'60)\ (19'20-3'60)}$

Resultados:

$$\cos C = \frac{3'60}{19'20} = 0'1875$$

$$\therefore \hat{C} = \text{arc cos } 0'1875 = \mathbf{79° 12'}$$

$$\hat{B} = 90° - 79° 12' = \mathbf{10° 48'}$$

$$c = \sqrt{22'80 \,.\, 15'60} = \mathbf{18'90\ m.}$$

La resolución del triángulo de fuerzas pertenece al primer caso (fig. 95):

Datos	*Incógnitas*	*Fórmulas*
EF = 200	GF	$GF = EF \text{ sen } \overset{\frown}{FEG}$
$\overset{\frown}{FEG} = 79° 12'$	EG	$EG = EF \cos \overset{\frown}{FEG}$

Resultados:

$$GF = 200 \text{ sen } 79° 12' = 200 \,.\, 0'9823 = \mathbf{197\ Kg.}$$

$$EG = 200 \cos 79° 12' = 200 \,.\, 0'1875 = \mathbf{37'5\ Kg.}$$

GF es la tracción efectiva en el sentido del movimiento del bote, y EG el esfuerzo que tiende a llevar el bote contra la orilla del canal.

196. **Cuarto caso: Dados los dos catetos.** — En el triángulo A B C (figura 96) se conocen *b* y *c*, y hay que hallar los restantes elementos:

Datos	*Incógnitas*	*Fórmulas*
b	a	$a = \sqrt{b^2 + c^2}$
c	$\hat{C}$	$\operatorname{tg} C = \dfrac{c}{b}$
	$\hat{B}$	$\hat{B} = 90° - \hat{C}$

Ejemplo. — *Una gasolinera puede navegar con velocidad de 24 kilómetros por hora en agua tranquila. La velocidad de la corriente de un río es de 8 km. h.* (figura 96). *Si la gasolinera parte de la orilla en dirección perpendicular al río, hallar la velocidad efectiva y la dirección de la trayectoria:*

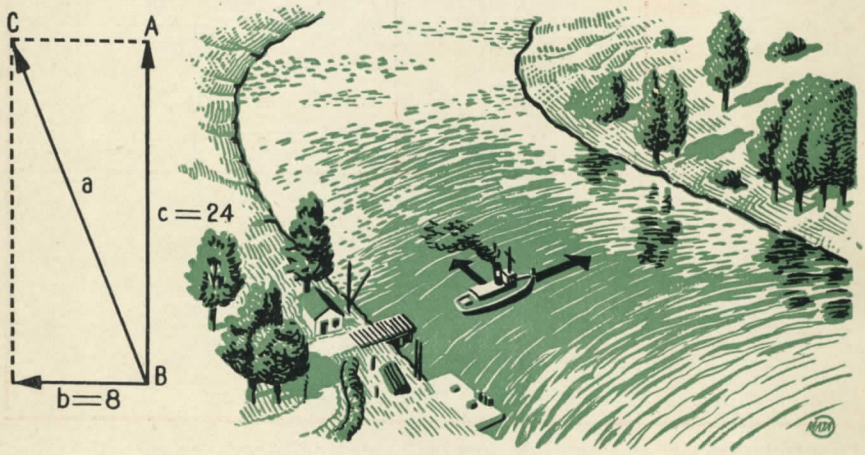


FIG. 96

Datos	*Incógnitas*	*Fórmulas*
c = 24	a	$a = \sqrt{24^2 + 8^2}$
b = 8	$\hat{C}$	$\operatorname{tg} C = \dfrac{24}{8} = 3$
	$\hat{B}$	$\hat{B} = 90° - \hat{C}$

Resultados: $a = \sqrt{576 + 64} = \sqrt{640} =$ **25'29 km./h.**

$\hat{C} = \operatorname{arc\,tg}\, 3 =$ **17° 36'**

$\hat{B} = 90° - 71° 36' =$ **18° 24'.**

197. **Método de doble observación.** — En el caso segundo hemos puesto un ejemplo de *simple observación*. Pero puede suceder que la base del objeto cuya altura quiera medirse no sea accesible. Entonces habrá que hallar la altura por *doble observación*, como se indica en el siguiente:

Ejemplo 1. — *El ángulo de elevación del extremo del mástil de una bandera, medido desde un punto del suelo horizontal, es* 53°, *caminando* 35 *m. hacia la bandera, el ángulo de elevación crece a* 64°. *Hallar la altura del extremo del mástil* (figura 97).

Solución: En el triángulo B P Q,

$$y = x \operatorname{cotg} 64° = 0'4877\ x.$$

En el triángulo A P Q,

$$y + 35 = x \operatorname{cotg} 53° = 0'7536\ x.$$

Restando de esta última la anterior:

$$35 = 0'2659\ x$$

y

$$\mathbf{x = 131'6\ m.}$$

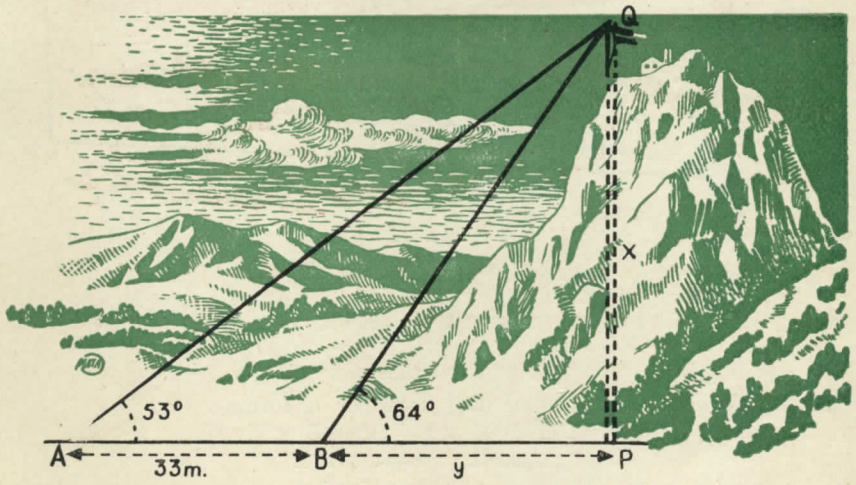


FIG. 97

Veamos un ejemplo del método de doble observación aplicado a un objeto móvil, permaneciendo fijo el observador, y que requiere el empleo de triángulos en diferentes planos.

Ejemplo 2. — *Un aeroplano vuela horizontalmente hacia el Este. En cierto instante, un observador situado al sur del aparato mide la elevación de éste, que resulta de* 42°. *Poco después, la elevación es de* 33°. *Si el aeroplano ha volado un kilómetro en este intervalo, ¿a qué altura vuela?* (figura 98).

Solución: Sean A y A′ las dos posiciones del aeroplano, distantes entre sí un kilómetro; A N y A′ N′ son verticales y P es el observador.

Los ángulos punteados $\overset{\frown}{A\,N\,P}$ y $\overset{\frown}{A'\,N'\,P}$ son rectos situados en planos verticales, y $\overset{\frown}{P\,N\,N'}$ sobre el suelo, ya que N P y N N′ son, respectivamente, el sur y el este de N.

Sea x la altura A N e y la distancias N P, ambos en Km. Tenemos:

En el Δ A N P:

$$y = x \cot g\, 42^\circ = 1'1106\, x \qquad (1)$$

En el Δ A′ N′ P:

$$P\,N' = x \cot g\, 33^\circ = 1'5399\, x \qquad (2)$$

En el Δ P N N′:

$$P\,N' = \sqrt{y^2 + 1}.$$

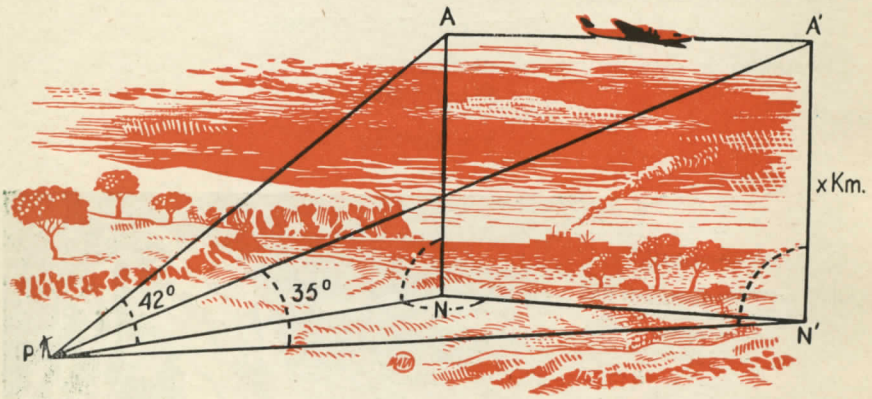


FIG. 98

Igualando estas dos últimas, sale:

$$\sqrt{y^2 + 1} = 1'5399\, x;$$

de donde:

$$y^2 + 1 = (1'5399)^2\, x^2.$$

Sustituyendo en ésta el valor de y dado por la fórmula (1):

$$(1'1106)^2\, x^2 + 1 = (1'5399)^2\, x^2$$

$$\therefore\ 1'2335\, x^2 + 1 = 2'3716\, x^2$$

$$\therefore\ 1 = 1'1381\, x^2$$

$$x^2 = \frac{1}{1'1381} = 0'8790$$

$$\therefore\ \mathbf{x = 0'938\ km.}$$

EJERCICIOS

1. Un globo está sujeto al suelo por un cordel de 80 m. de largo, que forma con el suelo horizontal un ángulo de 67°. Suponiendo que la cuerda esté recta, ¿cuál es la altura del globo?

2. Para hallar la distancia A B a través de una laguna, un agrimensor traza la recta A C perpendicular a A B (fig. 99). Medido el segmento A C, resulta 101 m. La medida del ángulo A C B es de 81°. ¿Qué longitud tiene A B?

3. La distancia a las primeras nubes se llama "altura del cielo del aviador". En un aeródromo un observador mira un rayo de luz lanzado verticalmente por un foco, y ve la nube que lo refleja con un ángulo de elevación de 72°. La distancia entre el observador y el foco es de 150 metros. Hallar la altura del cielo.

FIG. 99

4. Desde un faro colocado a 40 m. sobre el nivel del mar el ángulo de depresión de un barco es 55°. ¿A qué distancia del faro se halla el barco?

5. En un trozo de una carretera la inclinación es de 6°. ¿Cuánto sube la carretera en 42 m., medidos sobre el plano inclinado?

6. ¿Cuál es el ángulo de elevación de una carretera que sube 0'90 m. en una distancia de 16 m., medidos sobre el plano inclinado?

7. Cuando un aeroplano está directamente sobre un pueblo A, el ángulo de depresión de la ciudad B, distante 4'5 kilómetros de A, es 30°. Hallar la altura del aparato.

8. Desde un aeroplano, a una altura de 300 m., el ángulo de depresión de otro aeroplano, que está a una altura de 100 m., es 39°. ¿A qué distancia se encuentran ambos aparatos?

9. La distancia de un cañón a una carretera es 11'3 km. Si el alcance del cañón es 16 km., ¿qué longitud de carretera está dominada por el cañón? (Figura 100).

10. Si las puntas de las ramas de un compás distan 6'25 cm., y cada rama mide 11'5 cm., ¿qué ángulo forman?

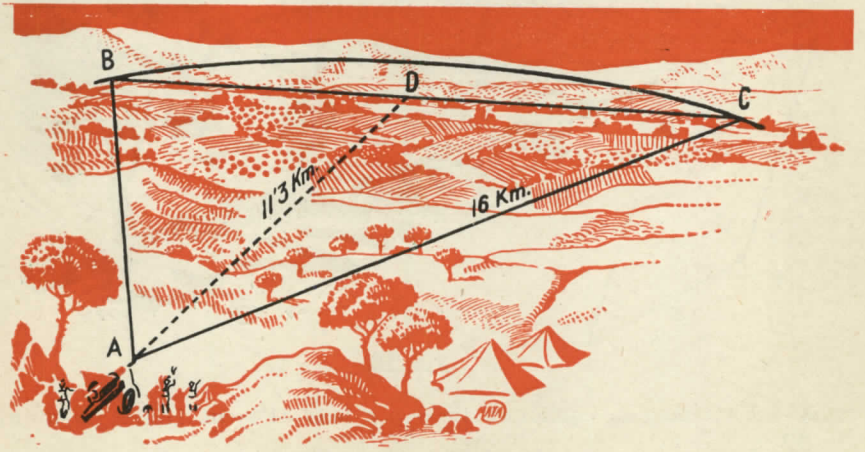


FIG. 100

11. Si las dos ramas de un compás forman un ángulo de 45° y su longitud es 12 cm., hallar la distancia entre las puntas de las ramas.

12. Dos oficiales colocados en A y B (fig. 101) observan, por el fulgor de los cañonazos, que el ángulo en B es 85° y que el ángulo A es 90°. Los puntos A y B distan 200 metros. ¿Cuánto dista la batería C de B?

FIG. 101

13. Un aeroplano puede volar con la velocidad de 400 kilómetros hora en atmósfera tranquila. Si cuando se dirige hacia el Este el viento viene del Sur con la velocidad de 40 km./h., ¿cuál es la dirección de su vuelo?

14. Una barca puede navegar en agua tranquila con la velocidad de 8 km./h., y la corriente del río lleva la velocidad de 6 km./h. ¿Bajo qué ángulo cortará la barca a la corriente para que la dirección de su movimiento sea perpendicular a la corriente? ¿Cuál es la velocidad resultante? (Fig. 102).

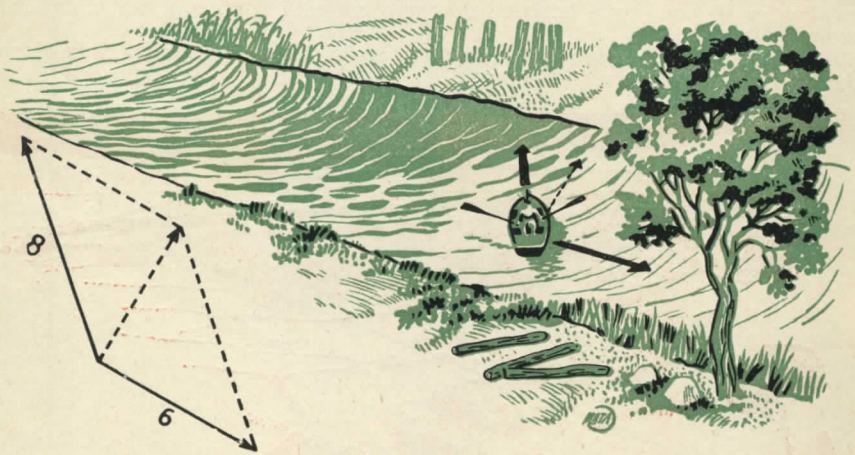


FIG. 102

15. Un triángulo equilátero tiene por lado 11'4 cm. Hallar su altura y su área.

16. La base de un triángulo isósceles mide 54 cm. y los ángulos en la base, 42°. Hallar sus lados iguales, la altura y el área.

17. Tres barras iguales de 54 dm., juntas en un extremo, forman un trípode. Hallar la longitud de un lado del triángulo formado por sus pies cuando el ángulo formado entre cada dos barras es de 63° 30′.

18. Un trozo de un ferrocarril es recto y pasa por dos estaciones S y T. Una persona que está en A halla que S está a 4'7 km. al Norte de ella y que T está al Este de ella, y también que un tren, caminando con la velocidad de 24 km. hora, emplea 20 minutos en ir de T a S. Hallar la distancia de T a A.

19. Un mástil B C, de longitud 12 m., está colocado en la cúspide de una torre D B, y los ángulos de elevación de C y B son 15° y 13°, respectivamente, medidos desde un punto A, que está al Oeste de la torre, y en un plano horizontal que contiene a D. Hallar: 1.°, la altura de la torre; 2.°, la distancia horizontal desde A a la torre.

20. La sección recta de un malecón tiene la forma de un trapecio isósceles con las bases horizontales, y la inclinación de cada lado respecto al horizonte es de 48° (fig. 103). Si la altura es de 13'8 m. y la anchura del fondo es de 34 m., calcular la anchura en la parte superior, el área de la sección recta y el número de m.^{3} de material por metro de longitud del malecón.

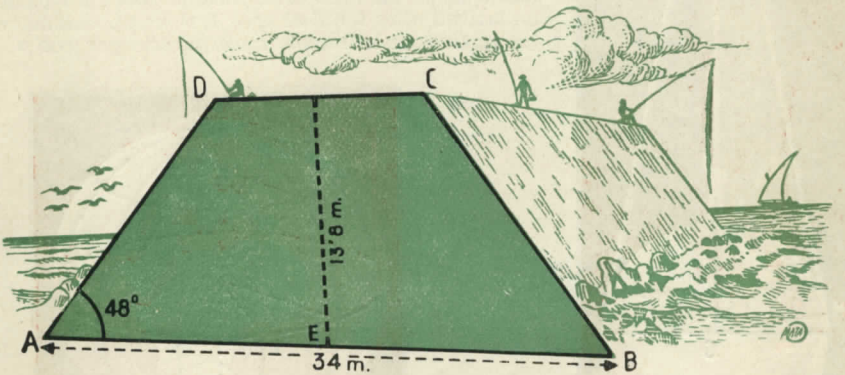


FIG. 103

21. Dos circunferencias de radios 4 cm. y 6 cm. tienen sus centros distantes 12 cm. Hallar la inclinación sobre la recta de los centros de: 1.°, una tangente común exterior; 2.°, de una tangente común interior.

22. Los lados de un paralelogramo son 4 cm. y 6'5 cm. y comprenden un ángulo cuya tangente es 0'65. Hallar su área.

23. Los ángulos de elevación de la cúspide de una torre, tomados desde dos puntos de un suelo horizontal en línea recta con su base y distantes entre sí 40 m., son 45° y 60°. Hallar la altura de la torre sobre el suelo y la distancia del punto de observación más próximo a la vertical que pasa por la cúspide.

24. Un hombre, que está al Oeste de la antena de una emisora de radio, observa que su ángulo de elevación es 42°. Camina 50 m. hacia el Sur y halla que el ángulo de elevación es ahora 36°. Hallar la altura de la antena y su distancia a la primera posición.

25. Un hombre observa un globo cautivo desde dos puntos: al Este y al Sur de él. Los respectivos ángulos de elevación son 45° y 60°, y las estaciones de observación distan entre sí 1200 m. Hallar la altura del globo.

26. A B C D es una puerta; A B es el umbral; la anchura de la puerta es 3 m., y la altura, 7 m. P es un punto del suelo directamente enfrente de A y a 10 m. de A. Hallar los ángulos subtendidos por A B, B C, C D, D A con P.

27. Un observador N ve la Luna exactamente en su cenit, es decir, verticalmente encima; en el mismo instante, otro observador H, situado en el mismo círculo máximo, pero separado por L grados, está observando la salida de la Luna por su horizonte. Determinar la distancia del centro de la Tierra a la Luna, sabiendo que el radio de la Tierra es 6370 kilómetros y que el ángulo $L = 89° \frac{1}{16}$ (figura 104).

28. Un observador ve la Luna en su cenit y mide el ángulo formado por las dos visuales, que van a dos puntos opuestos del contorno de la Luna llena. Si ese ángulo A vale medio grado, calcular el radio de la Luna. Tomar para distancia de la Tierra a la Luna = 384400 Km.

29. En los ejemplos que siguen, tómese para radio de la Tierra el valor de 6370 km.

Valiéndose de la figura 105, demostrar que la longitud de un arco C D, medido sobre un paralelo de latitud α, es igual al arco A B, comprendido entre los mismos meridianos, multiplicado por cos α.

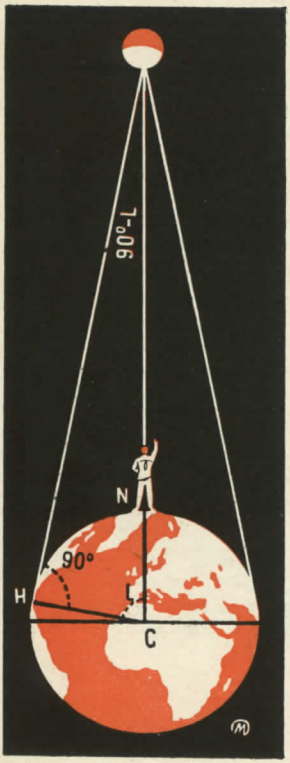


FIG. 104

FIG. 105

30. Madrid y Pittsburgo (Estados Unidos de América) están, aproximadamente sobre el mismo paralelo de 40° de latitud Norte. La longitud de Madrid (a partir de Greenwich es de unos 3° 3/4 Oeste, y la de Pittsburgo es de 80° Oeste. ¿Qué distancia separa estas dos ciudades?

31. Barcelona y Zamora se hallan, aproximadamente, a la misma latitud de 41° 30′. La longitud de Barcelona (a partir de Madrid) es de 5° 45′ Este, y la de Zamora, 2° Oeste. ¿Cuántos kilómetros hay entre ambas ciudades?

32. Quito, capital del Ecuador; Kisumu, a orillas del lago Victoria, en Kenia, y Pontianak, en Borneo, son lugares situados, aproximadamente, a medio grado del Ecuador. La longitud de Quito es 78° Oeste de Greenwich; la de Kisumu, 35° Este, y la de Pontianak es 109° Este. Hallar la distancia más corta entre cada dos de estos lugares, tomando para π el valor 22/7.

33. La latitud del Trópico de Cáncer es de 23° 27′. Calcular la longitud de su circunferencia y el área del círculo correspondiente.

34. Un bombardero, a la altura de 6705 m., vuela con la velocidad de 402 kilómetros/h. y deja caer una bomba desde un punto A. 1.º ¿Cuándo llegará al suelo? (Usar la fórmula $s = 1/2\ g\ t^2$). 2.º Si B está directamente debajo de A, y T es el punto en que choca contra el suelo, hallar B T. (B T es igual a la distancia recorrida por el bombardero en el tiempo t.)

35. Dos lugares del Globo están sobre el mismo meridiano. La latitud de A es 31° Norte y B se halla a 300 km. al Norte de A. ¿Cuál es la latitud de B?

36. Hallar la longitud de un lado de un octógono regular inscrito en una circunferencia cuyo radio es 49 cm.

37. Un lado de la base cuadrada de una pirámide regular mide 30 cm. y la altura 40 cm. Hallar la apotema y la arista de la pirámide. Hallar la inclinación de la cara lateral respecto de la base.

38. Hallar la velocidad, debida a la rotación de la Tierra, de un punto P, cuya latitud es 44° 30′. Tomar para radio de la Tierra 6370 km. (fig. 106).

39. Una diagonal de un cubo y una diagonal de una cara del cubo se cortan en el vértice. Hallar el ángulo que forman entre sí.

40. La altura de una torre es de 91'5 metros. Desde la cúspide de otra torre el ángulo de elevación de la cúspide de la primera es 12° y el ángulo de depresión de su base es 53°. Hallar la distancia entre las torres.

41. El lado de un pentágono regular inscrito es 6'8 m. Hallar el radio de la circunferencia circunscrita.

FIG. 106

42. A B C es un triángulo rectángulo en C; B C mide 30 m. y $\widehat{BAC} = 20°$. Si se prolonga C B hasta un punto P tal que $\widehat{PAC}$ sea de 55°, calcular la longitud C P (figura 107).

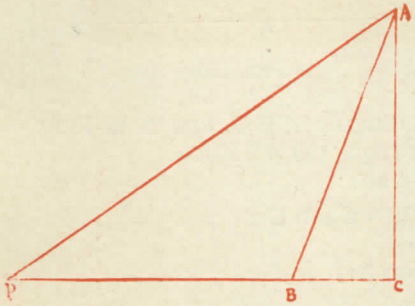


FIG. 107

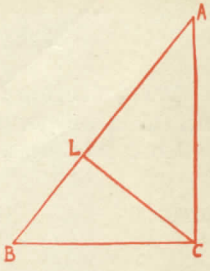


FIG. 108

43. Se traza la recta C L perpendicular a la hipotenusa A B del triángulo rectángulo A B C. Si B C = 12 dm., A C = 20 dm., hallar las longitudes restantes y los ángulos de la figura 108.

26

Primero y segundo casos de resolución de triángulos oblicuángulos

198. **Determinación de un triángulo.** — En la resolución de triángulos oblicuángulos por métodos trigonométricos se consideran cuatro casos, análogos a los que se estudian en Geometría, que son:

1.° Dado un lado y dos ángulos.
2.° Dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
3.° Dados dos lados y el ángulo comprendido.
4.° Dados los tres lados.

En la resolución de triángulos oblicuángulos, es decir, en la determinación de los demás elementos del triángulo, conocidos los que se indican en uno de los cuatro casos, se usan tres teoremas: el *del seno,* el *del coseno* y el *de la tangente.*

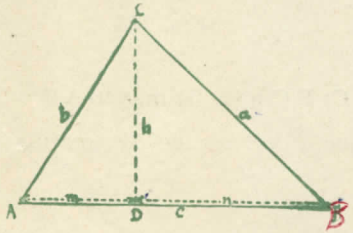


FIG. 109

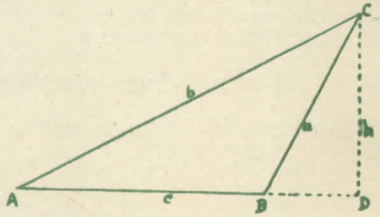


FIG. 110

199. **Teorema del seno.** — En el triángulo A B C, sea h la longitud de la perpendicular desde C a A B (figs. 109 y 110).

En los triángulos C D A y C D B se tiene:

$$h = b \operatorname{sen} A \quad \text{y} \quad h = a \operatorname{sen} B$$

luego:

$$a \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} A;$$

de donde, dividiendo por sen A sen B, sale:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}.$$

Trazando una perpendicular desde A a B C, se obtiene, de modo análogo:

$$\frac{b}{\text{sen B}} = \frac{c}{\text{sen C}}$$

$$\therefore \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{sen\ A}} = \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{sen\ B}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{sen\ C}} \qquad (1)$$

Este es el *teorema del seno,* que dice: *Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.*

El teorema del seno nos permite resolver los problemas comprendidos en los dos primeros casos indicados en el número 198.

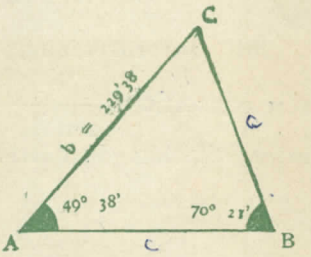


FIG. 111

200. Caso primero: Dado un lado y dos ángulos (fig. 111). Sea:

Datos	*Incógnitas*	*Fórmulas*	
b	$\hat{C}$	$\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B})$	(2)
$\hat{A}$	a	$a = \dfrac{b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$	(3)
$\hat{B}$	c	$c = \dfrac{b \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B}$	(4)

Las dos últimas fórmulas se deducen de la relación (1).

Ejemplo:

Datos ..... $\begin{cases} \hat{A} = 49° 38' \\ \hat{B} = 70° 21' \\ b = 229'38. \end{cases}$ Se pide: $\hat{C}$, a y c.

Solución: De la fórmula (2) sale:

$$180° = 179° 60'$$
$$\hat{A} + \hat{B} = 119° 59'$$
$$\hat{C} = \mathbf{60° 1'}.$$

Tomando logaritmos en las fórmulas (3) y (4), se tiene:

$$\log a = \log b + \log \operatorname{sen} A + \operatorname{colog} \operatorname{sen} B$$

$$\log b = 2'3606$$

$$\log \operatorname{sen} A = 1'8819$$

$$\operatorname{colog} \operatorname{sen} B = 0'0260$$

$$\therefore \log a = 2'2685$$

$$\therefore \quad a = 185'55$$

$$\log c = \log b + \log \operatorname{sen} C + \operatorname{colog} \operatorname{sen} B$$

$$\log b = 2'3606$$

$$\log \operatorname{sen} C = \bar{1}'9375$$

$$\operatorname{colog} \operatorname{sen} B = 0'0260$$

$$\therefore \log c = 2'3241$$

$$\therefore \quad c = 210'93$$

201. **Interpretación geométrica del teorema del seno.** — La razón constante $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$ tiene una interesante interpretación geométrica (fig. 112).

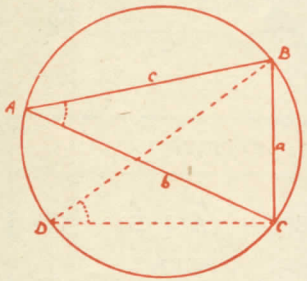


FIG. 112

Se circunscribe una circunferencia al Δ A B C y se traza el diámetro B D y la cuerda C D.

Se tiene:

$$\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} D = \frac{a}{d}$$

en donde *d* designa el diámetro.

Luego:

$$d = \frac{a}{\operatorname{sen} A}.$$

Es decir, *la razón constante del lado de un triángulo al seno del ángulo opuesto, es igual al diámetro de la circunferencia circunscrita al mismo.*

202. **Segundo caso: Dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.** — Por la Geometría sabemos que no siempre es posible construir un triángulo con los datos acabados de indicar. Así, supongamos que nos dan el ángulo A y los lados *a* y *b*.

1.ª Sea el caso en que $\hat{A}$ es *obtuso* ($\hat{A} > 90°$). Entonces el lado opuesto a A es el mayor del triángulo, y sólo puede construirse un triángulo que satisfaga a las condiciones dadas (fig. 113).

2.ª Si el $\hat{A}$ es recto ($\hat{A} = 90°$), puede construirse igualmente un *solo* triángulo. Hágase la construcción análoga a la de los triángulos rectángulos cuando se da un cateto y la hipotenusa.

3.ª Si $\hat{A}$ es agudo ($\hat{A} < 90°$), hay varias posibilidades:

a) Si $a < b \operatorname{sen} A$ ($b \operatorname{sen} A = h$ es la perpendicular desde C a A B), *no tiene solución el problema* (fig. 114).

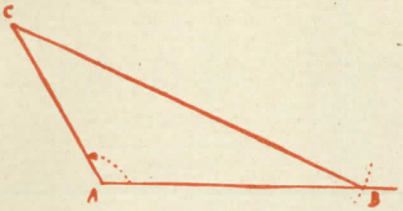


FIG. 113

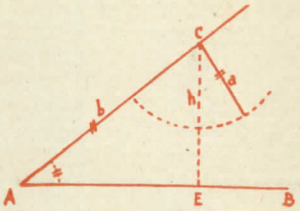


FIG. 114

b) Si $a = h = b \operatorname{sen} A$, hay *una sola solución* (fig. 115), que es el triángulo A C E.

c) Si $b > a > b \operatorname{sen} A$, hay dos soluciones (fig. 116), que son los triángulos A C F y A C F'.

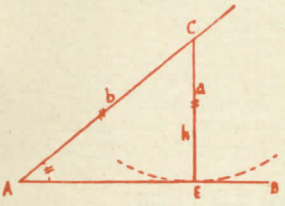


FIG. 115

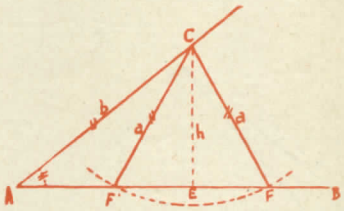


FIG. 116

d) Si $a = b$ (fig. 117), hay *una sola solución*.

e) Si $a > b$, el arco de radio *a* cortará a A B en dos puntos, pero sólo el triángulo A C F satisface las condiciones del problema (fig. 118).

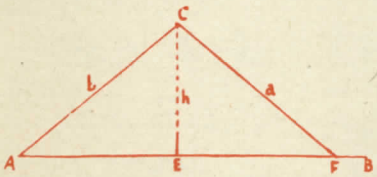


FIG. 117

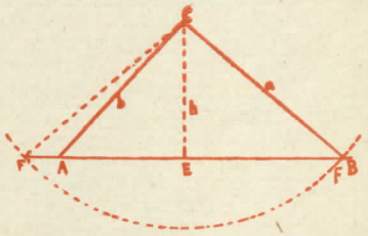


FIG. 118

El segundo caso frecuentemente se llama *caso ambiguo*, debido a esta indeterminación. Para su resolución es necesario previamente determinar el número de soluciones, y en seguida hallarlas mediante las siguientes fórmulas:

Datos	*Incógnitas*	*Fórmulas*
a	$\hat{B}$	$\operatorname{sen} B = \dfrac{b \operatorname{sen} A}{a}$ (5)
b	$\hat{C}$	$\hat{C} = 180^{\circ} - (\hat{A} + \hat{B})$ (6)
$\hat{A}$	c	$c = \dfrac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$ (7)

Como el primer valor que hay que hallar es el $\hat{B}$, y éste, según la fórmula (5), viene dado por el seno, habrá, en general, dos soluciones, que corresponden a los dos ángulos suplementarios que tienen el mismo seno hallado.

Ejemplo. — *Resolver el siguiente triángulo* (fig. 119):

$$a = 142'1; \quad b = 175'2; \quad \hat{A} = 40^{\circ}\ 5'.$$

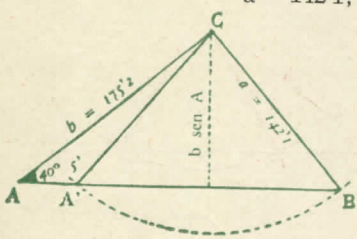


FIG. 119

Discusión:

$$\log b = 2'2435$$
$$\log \operatorname{sen} A = 1'8088$$
$$\log b + \log \operatorname{sen} A = 2'0523$$

Y ya que:

$$\log a = 2'1526,$$

se ve que:

$$\log a > \log (b \operatorname{sen} A);$$
$$\therefore b > a > b \operatorname{sen} A$$

luego hay dos triángulos, el A B C y el A A' C.

La solución completa es como sigue: Tomando logaritmos en las fórmulas (5) y (7):

PRIMERA SOLUCION

Fórmulas:

$$\log \operatorname{sen} B = \log b + \log \operatorname{sen} A + \operatorname{colog} a$$
$$\hat{C} = 180^{\circ} - (\hat{A} + \hat{B})$$
$$\log c = \log a + \log \operatorname{sen} C + \operatorname{colog} \operatorname{sen} A$$

Solución:

$$\log b = 2'2435$$
$$\log \operatorname{sen} A = \overline{1}'8088$$
$$\operatorname{colog} a = \overline{3}'8474$$
$$\log \operatorname{sen} B = \overline{1}'8997$$
$$\hat{B} = 52^{\circ}\ 33'.$$

$$\hat{B} + \hat{A} = 92^{\circ}\ 38'$$
$$\hat{C} = \widehat{ACB} = 87^{\circ}\ 22'$$
$$\log a = 2'1526$$
$$\log \operatorname{sen} C = \overline{1}'9995$$
$$\operatorname{colog} \operatorname{sen} A = 0'1911$$
$$\log c = 2'3432$$
$$c = 220'4.$$

SEGUNDA SOLUCION

Fórmulas:

$$\overset{\frown}{A\,A'\,C} = \overset{\wedge}{A'} = 180^\circ - \hat{B}$$

$$\overset{\frown}{A\,C\,A'} = \overset{\wedge}{C'} = 180^\circ - (\hat{A} + \overset{\wedge}{A'})$$

$$\log c = \log a + \log \operatorname{sen} C' + \operatorname{colog} \operatorname{sen} A.$$

Solución:

$$180^\circ = 179^\circ\,60'$$
$$\hat{B} = 52^\circ\,33'$$
$$\therefore \overset{\wedge}{A'} = \mathbf{127^\circ\,27'}$$

$$\hat{A} + \overset{\wedge}{A'} = 167^\circ\,32'$$
$$180^\circ = 179^\circ\,60'$$
$$\therefore \overset{\wedge}{C'} = \mathbf{12^\circ\,28'}$$

$$\log a = 2'1526$$
$$\log \operatorname{sen} C' = \bar{1}'3343$$
$$\operatorname{colog} \operatorname{sen} A = 0'1911$$
$$\log A\,A' = 1'6780$$
$$c = A\,A' = \mathbf{47'64.}$$

EJERCICIOS

1. ¿Cuál es el diámetro de la circunferencia circunscrita a un triángulo isósceles, cuya base es 12'5 cm. y cuyo ángulo opuesto es 20°?

2. Discutir la fórmula $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}$ cuando $\hat{B} = 90^\circ$; cuando $\hat{A} = 90^\circ$; cuando $\hat{A} = \hat{B}$; cuando $a = b$.

3. Desde dos puntos distintos A y B se observa un blanco T situado en territorio enemigo. La distancia entre A y B es 475'5 metros; $\overset{\frown}{T\,A\,B} = 87^\circ\,36'$; $\overset{\frown}{T\,A\,B} = 88^\circ\,21'$. ¿A qué distancia de A está el blanco?

Resolver los triángulos siguientes y comprobar los resultados:

4.	$a = 1000$ cm.	$B = 40^\circ$.	$C = 30^\circ$.
5.	$a = 6'684$ dm.	$A = 64^\circ\,30'$.	$B = 72^\circ\,18'$.
6.	$b = 2500$ m.	$A = 120^\circ$.	$C = 30^\circ$.
7.	$b = 26'83$ cm.	$A = 80^\circ\,30'$.	$C = 40^\circ\,12'$.
8.	$c = 50$ mm.	$B = 100^\circ\,40'$.	$A = 20^\circ\,30'$.
9.	$c = 7090$ mm.	$B = 110^\circ$.	$A = 32^\circ\,8'$.

10. Dos observadores miran un globo que está en el plano vertical que pasa por ellos. La distancia entre los observadores es de 4 km. Los ángulos de elevación del globo desde los observadores son 46° y 52°, respectivamente. Hallar la distancia desde el balón a cada observador y también la altura del balón sobre el suelo.

11. La distancia horizontal desde la cúspide de una torre al asta de una bandera es 153'5 m. El ángulo de elevación del extremo superior del asta es de 5° 8'. El ángulo de depresión del pie del asta es 15° 36'. Hallar la altura del asta.

12. Un barco zarpa con rumbo de 42° (42° Este respecto al Norte) y observa que dos faros, que distan entre sí 15 millas y están en el mismo meridiano, se hallan en las direcciones de 16° y 88° a la derecha del barco. ¿A qué distancia se encuentra el barco de cada uno de ellos?

13. Un barco S pide socorro y las señales son recibidas por dos estaciones de radio P y Q que distan entre sí 56 millas. La recta que une P y Q forma con la dirección Norte un ángulo de 48°. P recibe las señales con una dirección de 135° con N, mientras que Q las recibe con una dirección de 96° con N. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?

14. Se tiene en el suelo una recta A B de 500 metros de longitud. Las visuales dirigidas desde A y B al extremo del asta de una bandera forman con la recta los ángulos 112° y 63°, respectivamente. ¿A qué distancia de A se encuentra el extremo del asta?

15. Se desea saber la altura de una casa situada en la orilla opuesta de un río. La visual del extremo superior de la casa desde un cierto punto, forma un ángulo de elevación de 17°; aproximándose 25'8 m. a la orilla, el ángulo es de 31°. Hallar la altura de la casa.

16. Se ha situado un teodolito en dos estaciones A y B, a las orillas de un lago que está a 372 m. sobre el nivel del mar. Desde cada estación se ha dirigido una visual a un punto C situado en una colina. Desde A, la visual de C forma un ángulo de elevación de 15° 14', y los ángulos C A B y C B A son de 59° 10' y 71° 48' respectivamente. Siendo A B = 738 m. y horizontal, hállese la altura de C sobre el nivel del mar.

Resolver los triángulos siguientes con los datos que se indican:

17.	b = 8 dm.	a = 12 dm.	$\hat{A} = 150°$.
18.	b = 6 cm.	c = 7 cm.	$\hat{C} = 60°$.
19.	a = 50 m.	b = 70 m.	$\hat{A} = 62°$.
20.	c = 57'12 m.	b = 38'45 m.	$\hat{B} = 35° 20'$.
21.	c = 74 dm.	b = 56 dm.	$\hat{B} = 35° 15'$
22.	a = 7 mm.	c = 10 mm.	$\hat{A} = 40°$.
23.	a = 21 cm.	b = 30 cm.	$\hat{A} = 40°$.

24. En un cuadrilátero A B C D se dan A C = 4 cm., $\widehat{BAC} = 35°$, $\hat{B} = 75° 20'$, $\hat{D} = 38° 30'$ y $\widehat{BAD} = 70° 40'$; hallar la longitud de los lados.

25. Desde un crucero se observa un faro en la dirección 320° (respecto al Norte), a la distancia de 5 millas. Si la velocidad media del crucero es de 16 millas por hora y 45 minutos después ve al faro en la dirección de 75°, ¿cuál es el rumbo en que navega el crucero?

Resolver, indicando previamente el número de soluciones:

26.	a = 25 m.	b = 50 m.	$\hat{A} = 30°$.
27.	a = 100 cm.	b = 100 cm.	$\hat{A} = 30°$.
28.	a = 70 dm.	b = 100 dm.	$\hat{A} = 30°$.
29.	a = 30 cm.	b = 100 cm.	$\hat{A} = 30°$.
30.	a = 108 mm.	b = 85'4 mm.	$\hat{B} = 45°$.
31.	a = 802 mm.	b = 785 mm.	$\hat{A} = 32° 6'$.
32.	a = 204 cm.	b = 204 cm.	$\hat{A} = 50° 42'$.
33.	a = 20'03 dm.	b = 75'12 dm.	$\hat{A} = 74° 18'$.
34.	a = 201'1 cm.	b = 196'2 cm.	$\hat{B} = 77° 17'$.

27

Tercero y cuarto casos de resolución de triángulos oblicuángulos

203. **Teorema del coseno.** — Para resolver el tercero y el cuarto caso se pueden emplear dos teoremas: el del *coseno* y el de la *tangente*.

El primero es más sencillo, pero tiene la desventaja de que no se le puede aplicar el cálculo logarítmico, por constar de una suma de sumandos. Por eso se usa principalmente cuando los números son pequeños o cuando se desea dar al problema una solución rápida y aproximada.

En el número 115 se demostró que el cuadrado del lado opuesto a un ángulo agudo vale:

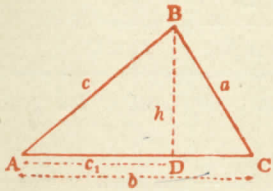


FIG. 120

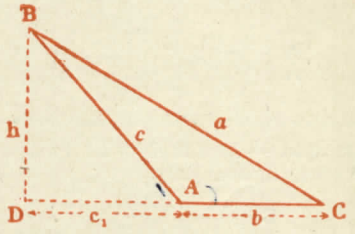


FIG. 121

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c_1 \qquad (1)$$

siendo c_1 la proyección de c sobre b (fig. 120) y, por tanto:

$$c_1 = c \cdot \cos A, \qquad (2)$$

ya que en el triángulo rectángulo A B D es $\cos A = c_1 : c$.

Reemplazando este valor en la fórmula (1) queda:

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A} \qquad (3)$$

Esta misma relación vale cuando el lado es opuesto a un ángulo obtuso, para el que se obtuvo en el número 116:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,b\,c_1 \qquad (4)$$

Pero ahora se tiene en el triángulo A B D (fig. 121):

$$\cos(180^\circ - A) = \frac{c_1}{c}; \qquad c_1 = c\cos(180^\circ - A).$$

Además (núm. 176):

$$\cos (180^\circ - A) = -\cos A.$$

Luego:

$$c_1 = -c \cos A \qquad (5)$$

Reemplazando este valor en (4) queda la misma fórmula (3). Dicha fórmula, válida para cualquier lado de un triángulo, es la expresión del *teorema del coseno*, que dice:

El cuadrado del lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el duplo producto de los mismos por el coseno del ángulo comprendido.

204. **Tercer caso: Dados dos lados y el ángulo comprendido.**—Sea:

Datos	*Incógnitas*	*Fórmulas*
b	a	$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A$
c	$\hat{B}$	$\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{b}{\text{sen } B}$ (6)
$\hat{A}$	$\hat{C}$	$\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{c}{\text{sen } C}$ (7)

Ejemplo. — *Dados* $b = 10$ *cm.*, $c = 7$ *cm. y* $A = 60^\circ$, *hallar los restantes elementos* (figura 122).

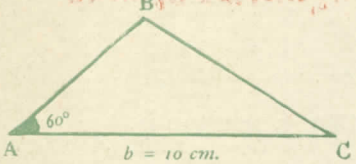


FIG. 122

Solución:

$$a^2 = 100 + 49 - 140 \cos 60^\circ = 79$$

$$a = \sqrt{79} = \mathbf{8'88\ cm.}$$

De las fórmulas (6) y (7) se deduce:

$$\frac{\sqrt{79}}{\text{sen } 60^\circ} = \frac{10}{\text{sen } B} \qquad \frac{\sqrt{79}}{\text{sen } 60^\circ} = \frac{7}{\text{sen } C}$$

$$\text{sen } B = \frac{10 \text{ sen } 60}{\sqrt{79}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{79}}$$

$$\log \text{sen } B = \log 5 + 1/2 \log 3 + 1/2 \operatorname{colog} 79$$

$$\log 5 = 0'6990$$
$$1/2 \log 3 = 0'2386$$
$$1/2 \operatorname{colog} 79 = \overline{1}'0512$$

$$\log \text{sen } B = \overline{1}'9888$$

$$\hat{B} = \mathbf{77^\circ}.$$

$$\text{sen } C = \frac{7 \text{ sen } 60^\circ}{\sqrt{79}} = \frac{3'5\sqrt{3}}{\sqrt{79}}$$

$$\log \text{sen } C = \log 3'5 + 1/2 \log 3 + 1/2 \operatorname{colog} 79$$

$$\log 3'5 = 0'5441$$
$$1/2 \log 3 = 0'2385$$
$$1/2 \operatorname{colog} 79 = \overline{1}'0512$$

$$\log \text{sen } C = \overline{1}'8338$$

$$\hat{C} = \mathbf{43^\circ}.$$

Comprobación: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 60° + 77° + 43° = 180°$.

205. Cuarto caso: Dados los tres lados. — Sea:

Datos	*Incógnitas*	*Fórmulas*
a	A	$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos A$
b	B	$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos B$
c	C	$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,c\cos B$

Ejemplo. — *Dados* $a = 10$ *dm.*, $b = 9$ *dm. y* $c = 7$ *dm., hallar los tres ángulos* (figura 123).

Solución:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} = \frac{81 + 49 - 100}{126} = \frac{30}{126}$$

$$\log\cos A = \log 30 + \operatorname{colog} 126$$
$$\log 30 = 1'4771$$
$$\operatorname{colog} 126 = 3'8996$$
$$\log\cos A = \bar{1}'3767$$
$$\mathbf{A = 76° 13'}$$

$$\cos B = \frac{100 + 49 - 81}{140} = \frac{68}{140}$$

$$\log\cos B = \log 68 + \operatorname{colog} 140$$
$$\log 68 = 1'8325$$
$$\operatorname{colog} 140 = 3'8539$$
$$\log\cos B = \bar{1}'6864$$
$$\mathbf{B = 60° 57'}$$

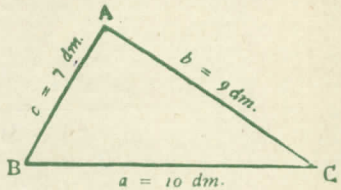


FIG. 123

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,a\,b} = \frac{100 + 81 - 49}{180} = \frac{132}{180}$$

$$\log\cos C = \log 132 + \operatorname{colog} 180$$
$$\log 132 = 2'1206$$
$$\operatorname{colog} 180 = \bar{3}'7447$$
$$\log\cos C = \bar{1}'8353$$
$$\mathbf{C = 42° 50'}$$

Comprobación:
$76° 13' + 60° 57' + 42° 50' = 180°$

La fórmula que da el teorema del coseno, por constar de sumandos, es poco apta para el cálculo logarítmico. Ello ha obligado a buscar otras fórmulas más aptas: *el teorema de la tangente* y las *fórmulas de Briggs*.

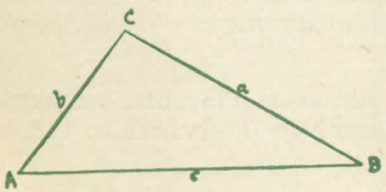


FIG. 124

206. Teorema de la tangente. — Sea el triángulo A B C (fig. 124), por el teorema del seno, tenemos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

y aplicando una propiedad de las proporciones:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}.$$

Pero según el número 188:

$$\frac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}{2 \cos \frac{A+B}{2} \operatorname{sen} \frac{A-B}{2}} = \operatorname{tg} \frac{A+B}{2}$$

$$\cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}.$$

Luego:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}.$$

Si $b > a$, la fórmula puede escribirse así:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A-B}{2}}.$$

Esta es la *ley de la tangente,* que puede enunciarse:

En todo triángulo la suma de dos lados es a su diferencia como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos es a la tangente de la semidiferencia de los mismos.

207. **El tercer caso resuelto por la ley de la tangente.** — Conocidos los lados *a* y *b* y el ángulo comprendido C, conocemos también $\frac{1}{2}(\hat{A} + \hat{B})$, ya que:

$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - \hat{C}$$

luego:

$$\frac{1}{2}(\hat{A}+\hat{B}) = 90^\circ - \frac{\hat{C}}{2}.$$

Y, por tanto, la ley de la tangente nos permite calcular el valor de $\frac{1}{2}(\hat{A}-\hat{B})$, pues:

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\hat{A}-\hat{B}) = \frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\hat{A}+\hat{B}) \qquad (8)$$

Conocido $\frac{1}{2}(\hat{A}-\hat{B})$, las dos identidades siguientes nos dan $\hat{A}$ y $\hat{B}$:

$$\hat{A} = \frac{1}{2}(\hat{A}+\hat{B}) + \frac{1}{2}(\hat{A}-\hat{B})$$

$$\hat{B} = \frac{1}{2}(\hat{A}+\hat{B}) - \frac{1}{2}(\hat{A}-\hat{B}).$$

Conocidos los ángulos, se hallará c por la fórmula:

$$c = \frac{b \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B} \qquad (9)$$

Ejemplo. — *Dados* $\hat{C} = 63^\circ\ 36'$, $a = 748$ *y* $b = 375$, *hallar* $\hat{A}$, $\hat{B}$ *y* c (fig. 125).

Solución: Tomando logaritmos en las fórmulas (8) y (9):

$$\log \operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B) = \log(a-b) +$$

$$+ \operatorname{colog}(a+b) + \log \operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)$$

$$\log c = \log b + \log \operatorname{sen} C + \operatorname{colog} \operatorname{sen} B$$

$$\frac{1}{2}(\hat{A}+\hat{B}) = 90 - \frac{\hat{C}}{2} = 58^\circ\ 12';$$

$$a + b = 1123;\quad a - b = 373$$

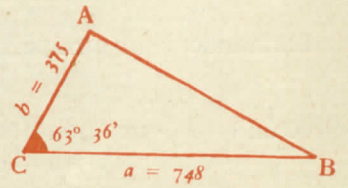


FIG. 125

$$\log (a - b) = 2'5717$$
$$\operatorname{colog} (a + b) = \bar{4}'9496$$
$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A + B) = 0'2076$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{1}{2} (A - B) = \bar{1}'7289$$

$$\therefore \frac{1}{2} (\hat{A} - \hat{B}) = 28^\circ 11'$$

y como

$$\frac{1}{2} (\hat{A} + \hat{B}) = 58^\circ 12'$$

sale:

$$\hat{A} = 86^\circ 23'; \quad \hat{B} = 30^\circ 1'$$

$$\log b = 2'5740$$
$$\log \operatorname{sen} C = \bar{1}'9521$$
$$\operatorname{colog} \operatorname{sen} B = 0'3007$$

$$\log c = 2'8268$$
$$c = 671'2$$

208. **Fórmulas de Briggs.** — Si en la fórmula:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos A$$

de la ley del coseno, despejamos cos A, obtenemos:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}.$$

Por tanto:

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} =$$

$$= \frac{2\,b\,c - b^2 - c^2 + a^2}{2\,b\,c} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2\,b\,c} = \frac{(a + b - c)\,(a - b + c)}{2\,b\,c}$$

y también:

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \cos A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} =$$

$$= \frac{2\,b\,c + b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2\,b\,c} =$$

$$= \frac{(b + c + a)\,(b + c - a)}{2\,b\,c}.$$

Llamando p al semiperímetro del triángulo, será:

$$a + b + c = 2\,p$$

y restando sucesivamente 2 a, 2 b y 2 c:

$$a + b - c = 2\,p - 2\,c = 2\,(p - c)$$
$$a - b + c = 2\,p - 2\,b = 2\,(p - b)$$
$$b + c - a = 2\,p - 2\,a = 2\,(p - a)$$

Sustituyendo estos valores en los resultados anteriores, se obtiene:

$$2\,\text{sen}^2\frac{A}{2} = \frac{2\,(p-c)\,.\,2\,(p-b)}{2\,b\,c} = \frac{2\,(p-c)\,(p-b)}{b\,c}$$

$$2\,\cos^2\frac{A}{2} = \frac{2\,p\,.\,2\,(p-a)}{2\,b\,c} = \frac{2\,p\,(p-a)}{b\,c}$$

y despejando:

$$\text{sen}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{b\,c}};\quad \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p\,(p-a)}{b\,c}} \qquad (10)$$

y análogamente:

$$\text{sen}\,\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-c)}{a\,c}};\quad \cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p\,(p-b)}{a\,c}} \qquad (11)$$

$$\text{sen}\,\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{a\,b}};\quad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{p\,(p-c)}{a\,b}} \qquad (12)$$

Dividiendo cada seno por su coseno, sale:

$$\text{tg}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p\,(p-a)}}$$

$$\text{tg}\,\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-c)}{p\,(p-b)}}$$

$$\text{tg}\,\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{p\,(p-c)}}.$$

Estas son las *fórmulas de Briggs,* que permiten hallar los ángulos de un triángulo conociendo los lados.

209. **El cuarto caso resuelto por las fórmulas de Briggs.**

Datos ... ... a, b, c

Incógnitas ... ... $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$.

Fórmulas. — Se emplean las de Briggs, que son muy aptas para el cálculo logarítmico. Tomando en ellas logaritmos, se obtiene:

$$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \frac{1}{2} [\log (p - b) + \log (p - c) + \operatorname{colog} p + \operatorname{colog} (p - a)]$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{1}{2} [\log (p - a) + \log (p - c) + \operatorname{colog} p + \operatorname{colog} (p - b)]$$

$$\log \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{1}{2} [\log (p - a) + \log (p - b) + \operatorname{colog} p + \operatorname{colog} (p - c)].$$

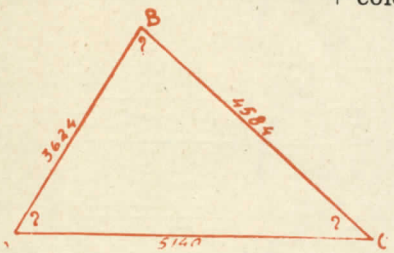


FIG. 126

Ejemplo. — $a = 4584$ *m.*, $b = 5140$ *metros*, $c = 3624$ *m.* (figura 126).

Solución:

$$2p = 13348$$
$$p = 6674$$
$$p - a = 2090$$
$$p - b = 1534$$
$$p - c = 3050$$

Cálculo de A:

$\log (p - b) = 3'1858$
$\log (p - c) = 3'4843$
$\operatorname{colog} p = \bar{4}'1756$
$\operatorname{colog} (p - a) = \bar{4}'6799$

$\bar{1}'5256$

$$\log \operatorname{tg} \frac{A}{2} = \bar{1}'7628$$

$$\frac{A}{2} = 30^\circ\, 5'$$

$$\hat{A} = 60^\circ\, 10'$$

Cálculo de C:

$\log (p - a) = 3'3201$
$\log (p - b) = 3'1858$
$\operatorname{colog} p = \bar{4}'1756$
$\operatorname{colog} (p - c) = \bar{4}'5157$

$\bar{1}'1972$

$$\log \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \bar{1}'5986$$

Cálculo de B:

$\log (p - a) = 3'3201$
$\log (p - c) = 3'4843$
$\operatorname{colog} p = \bar{4}'1756$
$\operatorname{colog} (p - b) = \bar{4}'8142$

$\bar{1}'7942$

$$\log \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \bar{1}'8971;$$

$$\frac{B}{2} = 38^\circ\, 17';$$

$$\hat{B} = 76^\circ\, 34'$$

$$\frac{C}{2} = 21^\circ\, 38'$$

$$\hat{C} = 43^\circ\, 16'$$

Comprobación:

$60^\circ\, 10' + 76^\circ\, 34' + 43^\circ\, 16' = 180^\circ$

EJERCICIOS

1. Dados $a = 5$ m., $b = 5$ m., y $\hat{C} = 60°$, hallar c.
2. Dados $a = 20$ cm., $b = 20$ cm. y $\hat{C} = 45°$, hallar c.
3. Dados $c = 20$ dm., $a = 40$ dm. y $\hat{B} = 30°$, hallar b.
4. Dados $a = 17$ m., $b = 12$ m. y $\hat{C} = 59°$, hallar $\hat{A}$.
5. De la ecuación $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A$, hallar el valor de $\hat{A}$ cuando $b^2 + c^2 = a^2$.
6. En el paralelogramo A B C D, A B = 6 cm., A D = 8 cm., y $\hat{A} = 30°$. Hallar las dos diagonales.

Resolver los triángulos siguientes:

7.	$a = 150$ m.	$b = 180$ m.	$\hat{C} = 97° 15'$.
8.	$b = 6'1$ cm.	$c = 9'3$ cm.	$\hat{A} = 73° 16'$.
9.	$b = 922'4$ dm.	$c = 1003'8$ dm.	$\hat{A} = 50° 50'$.
10.	$a = 21'8$ m.	$b = 15'7$ m.	$\hat{C} = 47° 32'$.
11.	$a = 103'21$ cm.	$b = 152'37$ cm.	$\hat{C} = 141° 8'$.

Resolver los siguientes problemas:

12. Las diagonales de un paralelogramo miden 10 y 12 cm., respectivamente, y el ángulo que forman es 48° 15'. Hallar los lados.
13. Dos hombres que andan a razón de 3 km./h., parten al mismo tiempo de un cruce de dos caminos rectos, que forman entre sí un ángulo de 15°. Los dos van en el mismo sentido. ¿A qué distancia mutua se encontrarán al cabo de dos horas?
14. Tres pueblos, A, B y C están unidos por carreteras rectas y llanas. La distancia A B = 6 km., la B C = 9 km. y el ángulo formado por A B y B C es de 130°. ¿Cuánto distan A y C?
15. Un buque, después de navegar 8 millas rumbo Sur, vira y navega once millas a un rumbo que cae a 54° al Este del Norte. ¿A qué distancia se encontrará del punto de partida?
16. Dos fuerzas de 21'6 kp. y 19'7 kp. forman entre sí un ángulo de 126°, actuando en un mismo punto. Hallar el valor de su resultante y su inclinación respecto a la fuerza mayor.
17. En un cuadrado A B C D se describe un arco circular B D con A como centro y A B como radio. Si A B = 5 dm., hallar la distancia desde el punto C a uno de los puntos de trisección del arco B D.
18. A y B están separados por una laguna (fig. 127). Se hace estación en C y se miden las distancias C A = 3825 metros, C B = 3475'6 m., y también el ángulo A B C = 62° 31'. Hallar la distancia desde A a B.
19. Un piloto sale con su aparato del aeródromo A para dirigirse directamente a B. Si sopla el viento de la dirección 338° con A B y con una velocidad de 25 millas/h. y la velocidad del aeroplano es de 180 millas/h., ¿en qué dirección debe apuntar el aparato?
20. Desde dos puntos A y B distantes entre sí 1609 m., se observa simultáneamente un aeroplano. En A, el ángulo horizontal entre el aparato y el punto B es 18° 37', y el ángulo de elevación del aparato es 37° 41'. En B, el ángulo horizontal entre A y el aeroplano es 64° 16'. Hallar la altura del aeroplano.

NOTA. — Angulo horizontal entre dos puntos P y Q vistos ambos desde un punto N es el ángulo entre dos planos verticales que pasan por N y P y por N y Q.

21. La distancia entre dos puntos C y D a un lado de un río (fig. 128) es 60 m. Desde estos puntos se miden los ángulos: $\widehat{ACB} = 58° 20'$, $\widehat{ACD} = 95° 20'$, $\widehat{ADB} = 53° 30'$, $\widehat{BDC} = 98° 45'$. ¿Cuál es la distancia entre A y B?

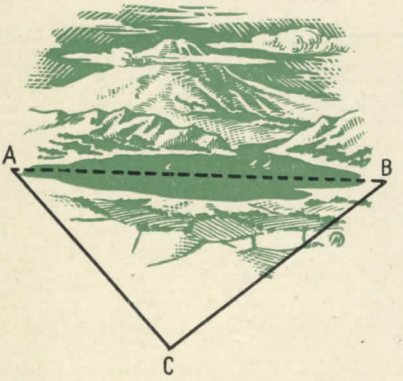


FIG. 127

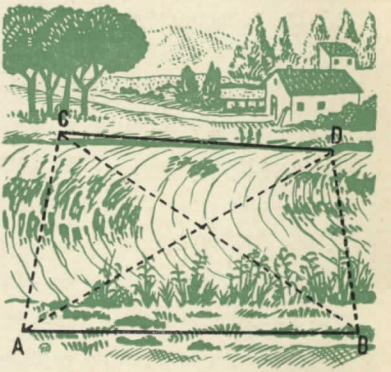


FIG. 128

Resolver los triángulos siguientes:

22.	$a = 3$ m.	$b = 4$ m.	$c = 5$ m.
23.	$a = 6$ dm.	$b = 9$ dm.	$c = 12$ dm.
24.	$a = 6$ cm.	$b = 8$ cm.	$c = 10$ cm.
25.	$a = 21$ cm.	$b = 26$ cm.	$c = 31$ cm.
26.	$a = \sqrt{5}$ dm.	$b = \sqrt{6}$ dm.	$c = \sqrt{7}$ dm.
27.	$a = 78$ m.	$b = 101$ m.	$c = 29$ m.
28.	$a = 14'5$ cm.	$b = 55'4$ cm.	$c = 66'9$ cm.

29. Los lados de un triángulo son 487'25, 512'33 y 544'37 m., respectivamente. Hallar el ángulo menor.

30. Los lados de un triángulo son 14'6 cm., 16'7 cm. y 18'8 cm., respectivamente. Hallar la longitud de la altura desde el vértice del ángulo mayor sobre el lado opuesto.

31. ¿Bajo qué ángulo visual se ve un objeto de 7 m. de largo por un observador cuyo ojo dista 5 m. de un extremo del objeto y 8 m. del otro extremo?

28

Fórmulas del área de un triángulo

Existen diversas fórmulas para hallar el área de un triángulo, según los datos de que se disponga.

210. **Dado un lado y la altura sobre dicho lado.** — Designemos la altura B D por *h;* el lado A C por *b,* y el área por S (fig. 129). Sabemos que:

$$S = \frac{b\,h}{2} \qquad (1)$$

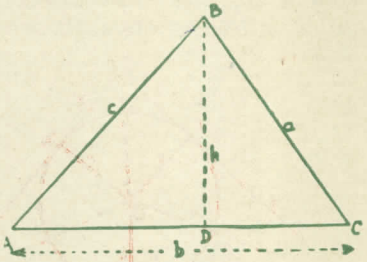


FIG. 129

211. **Dados dos lados y el ángulo comprendido.** — Ya que $h = a \operatorname{sen} C$, sustituyendo en la fórmula anterior, resulta:

$$S = \frac{a\,b \operatorname{sen} C}{2} \qquad (2)$$

Aplicaremos esta fórmula en el *tercer caso* de resolución de triángulos oblicuángulos.

212. **Dado un lado y dos ángulos.** — Por la ley del seno sabemos que:

$$a = \frac{b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B}.$$

Sustituyendo en la fórmula (2), resulta:

$$S = \frac{b^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} B}.$$

Ya que $\operatorname{sen}(A + C) = \operatorname{sen}(180° - B) = \operatorname{sen} B$, se tiene:

$$S = \frac{b^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen}(A + C)} \qquad (3)$$

Esta fórmula nos servirá en el *primer caso* de resolución de triángulos oblicuángulos.

213. **Dados los lados y el radio de la circunferencia circunscrita.** Hemos visto (número 201) que llamando R al radio de la circunferencia circunscrita al triángulo, es:

$$\frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R \qquad \therefore \operatorname{sen} C = \frac{c}{2R}.$$

Sustituyendo este valor en la expresión (2) sale:

$$S = \frac{a\,b\,c}{4R} \tag{4}$$

214. **Dados el perímetro y el radio de la circunferencia inscrita.** Sea O el punto de intersección de las bisectrices de los ángulos del triángulo A B C (figura 130) y *r*, por tanto, el radio de la circunferencia inscrita. Las bisectrices dividen al triángulo en tres triángulos parciales cuyas bases son los lados, y cuyas alturas son iguales a *r*. Luego:

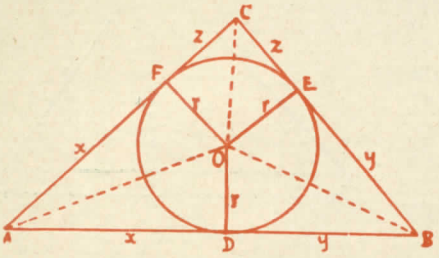


FIG. 130

$$S = \frac{a\,.\,r}{2} + \frac{b\,.\,r}{2} + \frac{c\,.\,r}{2} = r\,.\,\frac{a+b+c}{2}$$

o sea:

$$S = r\,p \tag{5}$$

siendo *p* el *semiperímetro*.

215. **Dados los tres lados.** — Según la fórmula (2) es:

$$S = \frac{1}{2}\,a\,b\operatorname{sen} C = a\,b\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} \tag{6}$$

en la que se ha sustituído $\operatorname{sen} C$ por $2\operatorname{sen}\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$ y en virtud de las fórmulas (10) del número 198, será:

$$S = a\,b\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{a\,b}}\sqrt{\frac{p\,(p-c)}{a\,b}} =$$

$$= a\,b\sqrt{\frac{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}{a^2\,b^2}} = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}.$$

Esta es la *fórmula de Herón;* es la más práctica en el cuarto caso de resolución de triángulos.

EJERCICIOS

Hallar el área de los siguientes triángulos:

1.	$a = 15$ m.	$b = 20$ m.	$c = 25$ m.
2.	$a = 5'3$ cm.	$b = 4'8$ cm.	$c = 4'6$ cm.
3.	$a = 10$ dm.	$b = 10$ dm.	$c = 10$ dm.
4.	$a = 7'1$ dm.	$b = 5'3$ dm.	$c = 6'4$ dm.
5.	$b = 8$ m.	$c = 5$ m.	$\hat{A} = 60°$.
6.	$a = 4'9$ m.	$b = 5'4$ m.	$\hat{B} = 38° 26'$.
7.	$b = 21'66$ cm.	$c = 36'94$ cm.	$\hat{A} = 66° 4'$.
8.	$a = 122'5$ cm.	$c = 122'5$ cm.	$\hat{B} = 110° 31'$.
9.	$a = 17$ dm.	$\hat{B} = 48°$.	$\hat{C} = 52°$.
10.	$a = 182$ dm.	$\hat{B} = 63° 30'$.	$\hat{C} = 78° 24'$.
11.	$b = 527'4$ dm.	$\hat{A} = 73° 42'$.	$\hat{C} = 63° 37'$.
12.	$c = 296'3$ cm.	$\hat{A} = 58° 35'$.	$\hat{B} = 42° 36'$.

Hallar el radio de la circunferencia inscrita y el de la circunscrita en los siguientes triángulos:

13. $a = 2'4$ m. $b = 3'2$ m. $c = 4$ m.
14. $a = 2'7$ cm. $b = 3'6$ cm. $c = 4'5$ cm.
15. $a = 3'9$ cm. $b = 5'2$ cm. $c = 6'5$ cm.
16. $a = 12$ dm. $b = 12$ dm. $c = 12$ dm.

17. El lado de un rombo mide 16 cm. y un ángulo es 65°. Hallar el área.

18. Un jardín tiene la forma triangular y sus lados miden 24, 30 y 42'5 metros. Hallar el área del mayor adorno circular que pueda hacerse en este campo.

19. El lado de un exágono regular mide 64 cm. Hallar el área.

20. El lado de un decágono regular mide 46 m. Hallar el área.

21. Las diagonales de un cuadrilátero son 75 dm. y 49 dm. y se cortan bajo un ángulo de 42°. Hallar el área.

22. Las diagonales de un paralelogramo son 12'5 dm. y 12'8 dm., respectivamente, y el ángulo comprendido es 52° 16'. Hallar los lados y el área del paralelogramo.

23. En un círculo cuyo radio es 111'3 dm., hallar el área comprendida entre una cuerda cuya longitud es 129'3 dm. y el diámetro paralelo a ella.

24. Si r es el radio de una circunferencia, probar que el área del polígono regular circunscrito de n lados es $\pi r^2 \operatorname{tg} \frac{180°}{n}$, y que el área del polígono regular inscrito es $\frac{\pi}{2} r^2 \cdot \operatorname{sen} \frac{360°}{n}$.

PROBLEMAS DE RECAPITULACION

1. Dos barcos zarpan de un puerto al mismo tiempo. Uno va en la dirección NE., con la velocidad de 8'5 millas por hora y el otro va en dirección N., con la velocidad de 10 millas por hora. ¿A qué distancia estarán entre sí al cabo de dos horas?

2. Un observador militar nota que dos baterías enemigas forman con su puesto de observación un ángulo de 40°. El intervalo entre el fogonazo y el

sonido producido con éste es de 5 segundos para una batería y 4 segundos para la otra. Si la velocidad del sonido es de 347'5 m. por segundo, ¿cuánto distan entre sí las baterías (Fig. 131).

3. Dos circunferencias, cuyos radios son 12 cm. y 16 cm., respectivamente, se cortan. El ángulo que forman entre sí las tangentes en sus puntos de intersección es 29° 30′. Hallar la distancia entre los centros de las circunferencias.

4. Las diagonales de un paralelogramo miden 7 cm. y 9 cm., respectivamente; se cortan bajo un ángulo de 52°. Hallar los lados del paralelogramo. (Fig. 132).

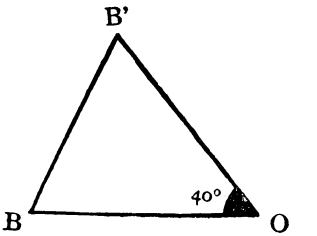


FIG. 131

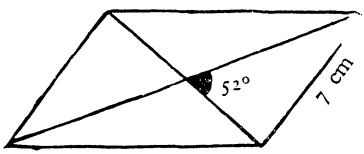


FIG. 132

5. Un faro está a 10 millas al NE. de un muelle. Un barco sale del muelle a las 12 del día en dirección E. con la velocidad de 12 millas por hora. ¿A qué hora estará a 8 millas del faro?

6. Un mástil vertical de 35 m. de alto, situado en suelo inclinado, está sujeto por un alambre que va desde el extremo superior del mástil a un punto del suelo que dista 25 m. de su pie. Si el mástil subtiende un ángulo de 30° desde el punto donde el alambre se sujeta al suelo, ¿qué longitud tiene el alambre?

7. Dos lados de un paralelogramo miden 6'945 y 4'183 metros respectivamente; una diagonal mide 6'029 m. Hallar la longitud de la otra diagonal.

8. Los lados de un campo triangular miden: A B = 193'8 m., B C = 139'8 m. y C A = = 218'3 m. Si la dirección de A B es NE., formando 20° con el N., hallar las direcciones de B C y C A sabiendo que C está al O. de A B.

9. Sobre el borde de un río de orillas paralelas un agrimensor toma una base de 60 m. de larga. Desde los extremos de la base se mira un objeto C de la orilla opuesta. Las visuales forman con la base los ángulos 62° 53′ y 81° 47′ respectivamente. Hallar la anchura del río.

10. Para medir la distancia entre dos puntos inaccesibles A y B se toma una base C D de 116'82 m. de longitud y se miden los ángulos siguientes: $\widehat{ACD} = 132° 29'$; $\widehat{ACB} = 82° 20'$; $\widehat{ADC} = 45° 59'$; $\widehat{BDC} = 124°$. Hallar la distancia A B.

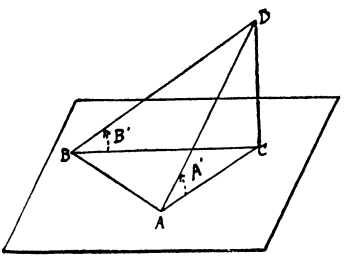


FIG. 133

11. Se desea hallar las distancias horizontal y vertical desde un punto A (figura 133) a otro punto inaccesible, D, cuando no es conveniente medir una base en el mismo plano vertical que pasa por A y D. Para ello se ha tomado una longitud A B = = 125'5 m. en un plano horizontal y en una dirección conveniente. Sea C el pie de la perpendicular desde C a este plano. Sean los ángulos de elevación de D desde A y B respectivamente, $\hat{A}' = 38° 42'$ y $\hat{B}' = ?$ Además se miden $\widehat{ABC} = 46° 27'$; $\widehat{BAC} = 54° 40'$. Hallar A C, C D, $\hat{B}'$.

29

Números complejos y vectores

216. **Números imaginarios.** — Al estudiar el Algebra vimos que la resolución de algunas ecuaciones de segundo grado conduce a una raíz cuadrada de un número negativo. Dicha raíz no tiene solución dentro del campo de los números reales. Así, de la ecuación

$$x^2 + 4 = 0$$

se deduce:

$$x = \sqrt{-4}.$$

Y de la ecuación:

$$x^2 - 8x + 25 = 0$$

obtenemos:

$$x = 4 \pm \sqrt{16 - 25} = 4 \pm \sqrt{-9}.$$

Los primeros matemáticos creyeron que era imposible dar un significado a los símbolos $\sqrt{-4}$ y $\sqrt{-9}$, y llamaron a tales números *imaginarios*. Pero gradualmente se han hallado modos de interpretar estos nuevos símbolos, de manera que puedan ser objeto de las mismas operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división que los números reales.

Se ha denominado *unidad imaginaria* al número $\sqrt{-1}$, y se le ha definido como un número que, multiplicado por sí mismo, da -1; esto es:

$$\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})^2 = -1.$$

Corrientemente se le representa con la letra *i*. Con esto, puede escribirse:

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = 2\sqrt{-1} = 2i;$$

$$4 \pm \sqrt{-9} = \pm \sqrt{9 \cdot (-1)} = 4 \pm 3\sqrt{-1} = 4 \pm 3i.$$

En general, si *a* y *b* son dos números reales, al número $a + bi$ se le llama *número complejo*, siendo *a* su *parte real* y *b su parte imaginaria*. Definiremos, pues:

Número complejo es un par de números reales (a, b) *dados en un orden determinado;* entendiendo que *a* es la *parte real* y *b* la *parte imaginaria.*

A la forma $a + bi$ del número complejo se denomina *forma binómica.* Si es $b = 0$, queda el número *a* real. Si es $b \neq 0$, el número se denomina *imaginario.* Este se llama *imaginario puro* cuando es $a = 0$.

Los números complejos se clasifican, pues, en *reales* e *imaginarios*, siendo un caso particular de estos últimos los *imaginarios puros*.

Ejemplos:

4 es un número real;
$3 + 4\,i$ es un número imaginario;
$2\,i$ es un número imaginario puro.

217. **Representación geométrica.** — Se sabe que un número *real* puede representarse por un punto situado sobre una recta X′ X (figura 134). Basta tomar sobre ésta un *punto origen* O que representa el número *cero*, a partir del cual se llevará el segmento unidad y sus partes alícuotas. Los números positivos vendrán representados a la derecha del punto O, y los negativos a la izquierda. En la figura, el punto A representa el número *real* a, y el punto A′ representa el número $-a$. Lo que sigue sugiere la representación de los números imaginarios.

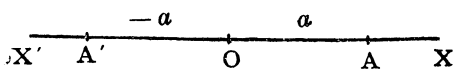


FIG. 134

Haciendo girar el segmento O A dos ángulos rectos alrededor del punto O y en sentido positivo, se obtiene el segmento O A′; pero sabemos que A y A′ representan los números a y $-a$. Luego la multiplicación de un número por el factor -1 puede interpretarse geométricamente como una rotación de 180° en sentido contrario a las agujas de un reloj. Y siendo $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$, esto sugiere que la multiplicación por $\sqrt{-1}$ debe interpretarse como la rotación de 90° en el sentido positivo.

Así, efectivamente, se ha convenido, y con esto los números imaginarios puros vienen representados sobre un eje Y′ Y, perpendicular al eje X′ X, en el que se representaban los números reales (fig. 135), por encima del origen los positivos, y por debajo los negativos.

Ejemplos. — El número $3\,i$ vendrá representado en el eje Y′ Y, a 3 unidades del origen y en la parte superior del mismo.

El número $-5\,i$ se representa a 5 unidades de distancia del origen de coordenadas y en la parte inferior del mismo.

El número i se denomina "manivela de Taylor", ya que hace girar un ángulo de 90°.

Un número imaginario cualquiera $a + b\,i$ se representa por el punto P, cuyas coordenadas son a y b (figura 135). De este modo, todo

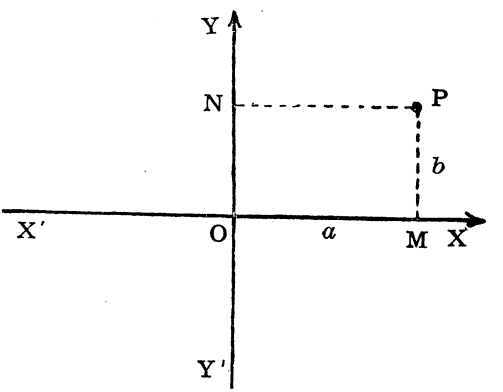


FIG. 135

complejo (sea real o imaginario) viene representado por un punto del plano, y por uno sólo que se denomina su *afijo*.

Y, recíprocamente, a todo punto del plano le corresponde un número complejo, y uno sólo. Esto lo expresamos diciendo que existe una *correspondencia biunívoca* entre los números complejos y los puntos del plano.

218. **Vectores.** — *Vector es un segmento orientado, esto es, definido por su longitud, su dirección y su sentido.*

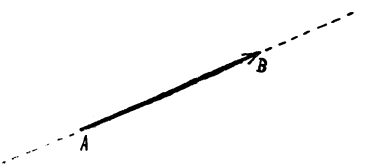


FIG. 136

Dirección es la recta indefinida (fig. 136) en que se encuentra el segmento; dentro de ella caben dos sentidos. El vector de origen A y extremo B se llama "vector AB" y se representa por la notación $\vec{AB}$; su *sentido* es el del recorrido de A a B. El vector $\vec{BA}$, de origen B y extremo A, es el *opuesto* del vector $\vec{AB}$; se escribe $\vec{BA} = -\vec{AB}$.

Vectores que están situados sobre rectas paralelas, se dice que tienen la *misma dirección*.

Dos vectores son *equipolentes* o *iguales* únicamente en el caso de que tengan iguales sus tres elementos: longitud, dirección y sentido. La equipolencia o igualdad de los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{A'B'}$ se expresa así:

$$\vec{AB} = \vec{A'B'}.$$

219. **Representación vectorial de los números complejos.** — En la figura 135 obtuvimos una representación de los números complejos por medio de los puntos de un plano. Si ahora unimos estos puntos con el origen de coordenadas O (figura 137), resultan vectores $\vec{OP}$, tales que a cada punto del plano corresponde un vector, y uno sólo; y, recíprocamente, a cada vector de origen O corresponde un punto del plano, y sólo uno. Podemos, pues, establecer una correspondencia biunívoca entre los números complejos y los vectores del plano, y, por consiguiente,

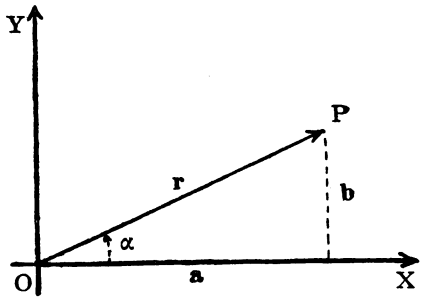


FIG. 137

representar a aquéllos mediante éstos. Lo que digamos en adelante se referirá, pues, indistintamente a los números complejos y a los vectores.

Se llaman *componentes* del vector $\overrightarrow{OP}$ a los números a y b (figura 137), en este mismo orden.

220. **Formas factorial y polar del número complejo.** — Sabemos que el vector OP (fig. 137) es la representación geométrica del número complejo $a + b\,i$. Además, se tiene que:

$$\left.\begin{aligned} a &= r\cos\alpha \\ b &= r\,\text{sen}\,\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Luego:

$$a + b\,i = r\cos\alpha + i\,r\,\text{sen}\,\alpha = r\,(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha).$$

Por tanto, cualquier número complejo puede ponerse en la forma:

$$\mathbf{r\,(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)}, \qquad (2)$$

que se denomina *forma factorial* o *trigonométrica* del número complejo.

La longitud $OP = r$ se llama *módulo*, y el ángulo α que forma OP con la parte positiva del eje se llama *argumento* del número complejo o del vector, indistintamente. Estas dos cantidades determinan el vector y, por tanto, el número complejo puede expresarse abreviadamente en la forma:

$$r_\alpha,$$

llamada *forma polar* del número complejo. El argumento del número complejo puede variar entre 0° y 360°.

Conocida esta forma o la factorial, las fórmulas (1) permiten pasar a la forma binómica. Recíprocamente, conocida esta última, las relaciones:

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \text{tg}\,\alpha &= \frac{b}{a} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

que se deducen fácilmente, nos permiten obtener la forma factorial.

Ejemplo 1. — *Expresar el número* $3_{30°}$ *en forma binómica.*

Solución: Las fórmulas (1) dan:

$$a = 3\cos 30° = 2'60; \qquad b = 3\,\text{sen}\,30° = 1'50.$$

Luego:

$$3_{30°} = \mathbf{2'60 + 1'50\,i}.$$

Ejemplo 2. — *Expresar el número* $5 + 5\sqrt{3}\,i$ *en forma polar.*
Solución: Las fórmulas (3) dan:

$$r = \sqrt{25 + 75} = \sqrt{100} = 10;$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3}$$

de donde:

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{3} = 60°.$$

Luego:

$$5 + 5\sqrt{3}\,i = 10\,(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) = \mathbf{10}_{60°}.$$

Ejemplo 3. — *Expresar en forma polar el número* $1 - \sqrt{3}\,i$.
Solución:

$$r = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3}) = 120° \text{ y } 300°.$$

Pero como $a = 1 > 0$ y $b = -\sqrt{3} < 0$, el vector está en el 4.° cuadrante y la única respuesta válida es $\alpha = 300°$. Luego:

$$1 - \sqrt{3}\,i = \mathbf{2}_{300°}.$$

Ejemplo 4. — *Expresar en forma polar* $-1 - i$.
Solución:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\alpha = \operatorname{art\,tg}\frac{-1}{-1} = \operatorname{arc\,tg} 1 = 45° \text{ y } 225°.$$

Pero como el vector está en el tercer cuadrante, la única solución es $\alpha = 225°$.
Luego:

$$-1 - i = \sqrt{\mathbf{2}}_{225°}.$$

221. Números complejos iguales. — Dijimos que dos vectores son iguales únicamente si tienen iguales su longitud, dirección y sentido, o, lo que es lo mismo, su módulo y argumento.

Y, recíprocamente, dos vectores iguales tienen igual módulo e igual argumento. Luego:

La condición necesaria y suficiente para que dos números complejos sean iguales es que tengan iguales el módulo y los argumentos sean iguales o difieran en un número entero de circunferencias.

Si los dos números vienen dados en la forma binómica y son iguales, determinan el mismo punto del plano, y, por tanto, tendrán iguales, respectivamente, sus partes reales y sus partes imaginarias, y recíprocamente. Luego:

La condición necesaria y suficiente para que dos números complejos sean iguales, es que sean iguales entre sí sus componentes reales y también iguales entre sí sus componentes imaginarias.

222. **Complejos conjugados y opuestos.** — Dos complejos se llaman *conjugados* cuando sólo difieren en el signo de sus componentes imaginarias, y, por tanto, están representados por puntos simétricos respecto del eje X′X.

Así, son complejos conjugados $a + bi$ y $a - bi$, que vienen representados en la figura 138 por $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OP'}$.

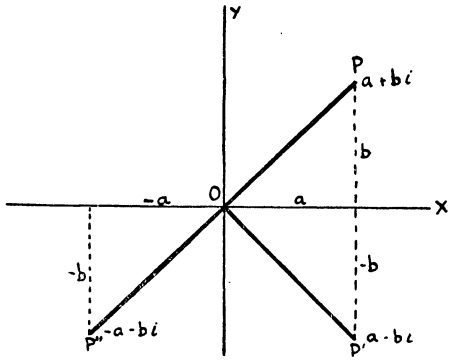


FIG. 138

Las dos soluciones de la ecuación $x^2 - 8x + 25 = 0$, estudiadas en el número 216, son imaginarias conjugadas. Y, en general, *si una ecuación de segundo grado tiene raíces imaginarias, éstas son conjugadas.*

Dos complejos se llaman *opuestos* cuando las componentes del uno son, respectivamente, los números opuestos de las componentes del otro, y, por tanto, están representados por puntos simétricos respecto del origen de coordenadas.

Así, son complejos opuestos $a + bi$ y $-a - bi$, que están representados en la figura 138 por $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OP''}$.

EJERCICIOS

Expresar en forma binómica:

1. $\sqrt{-36}$.
2. $\sqrt{-64}$.
3. $\sqrt{-81} + 7$.
4. $\sqrt{-100} + \sqrt{25}$.
5. $\sqrt{-625}$.
6. $\sqrt{-6}$.
7. $\sqrt{-12} + 3'5$.
8. $\sqrt{-1/9} - 1/8$.
9. $\sqrt{-16\,m^2n^6}$.

Expresar en la forma binómica las raíces de las siguientes ecuaciones:

10. $x^2 - 6x + 13 = 0$.
11. $x^2 + 10x + 34 = 0$.
12. $x^2 - 8x + 17 = 0$.
13. $36x^2 - 24x + 13 = 0$.
14. $4x^2 + 4x + 5 = 0$.
15. $x^2 + 6x + 10 = 0$.

Representar gráficamente los siguientes números y expresarlos en la forma factorial:

16. $1 + i\sqrt{3}$.
17. $-1 - i\sqrt{3}$.
18. $\sqrt{3} - i$.
19. $1 + i$.
20. $-1 - i$.
21. $-1 + i$.

Escribir los números siguientes en la forma binómica:

22. $2(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$.
23. $4(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)$.
24. $3(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$.
25. $5(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$.
26. $2(\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°)$.
27. $(\cos 150° + i \operatorname{sen} 150°)$.

30

Adición y sustracción de números complejos y vectores

223. **Adición y sustracción de números complejos.** — Los números complejos se suman y restan lo mismo que polinomios de primer grado en *i*. Por tanto:

La componente real de la suma es la suma de las componentes reales de los sumandos; y la componente imaginaria es la suma de las componentes imaginarias de los sumandos, y análogamente para la diferencia. Así:

$$(a + b\,i) + (a' + b'\,i) = a + b\,i + a' + b'\,i = (a + a') + (b + b')\,i;$$
$$(a + b\,i) - (a' + b'\,i) = a + b\,i - a' - b'\,i = (a - a') + (b - b')\,i.$$

Ejemplo 1. — Efectuar $\sqrt{-16} + \sqrt{-9} - \sqrt{-25}$.

Solución:

$$\sqrt{-16} + \sqrt{-9} - \sqrt{-25} = \sqrt{16}\sqrt{-1} + \sqrt{9}\sqrt{-1} - \sqrt{25}\sqrt{-1} = 4\,i + 3\,i - 5\,i = 2\,i.$$

Ejemplo 2. — $3 + 4\,i - (5 + 3\,i) = -2 + 2\,i$.

COROLARIOS. — De la regla dada para sumar y restar complejos se deduce que:

1.° *La suma de dos complejos conjugados es igual al duplo de su componente real.* Así:

$$(a + b\,i) + (a - b\,i) = a + b\,i + a - b\,i = 2\,a.$$

2.° *La suma de los complejos opuestos es igual a cero.* Así:

$$(a + b\,i) + (-a - b\,i) = a + b\,i - a - b\,i = 0.$$

224. **Interpretación geométrica de la adición y sustracción.** — Sean $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ los dos vectores (fig. 139), que representan a los dos complejos sumandos. Llevemos, a partir del punto A, un vector $\overrightarrow{AC}$ equipolente al $\overrightarrow{OB}$. La suma pedida está representada por el vector $\overrightarrow{OC}$, porque sus componentes son las sumas respectivas de los componentes de los sumandos; así:

$$OC' = OA' + A'C' = OA' + OB' = a + a';$$
$$CC' = C'D + DC = AA' + BB' = b + b'.$$

Esta construcción suele llamarse *suma geométrica* de los dos vectores o de los dos números complejos, y como se ve, equivale a la construcción de la diagonal del paralelogramo O A C B; frecuentemente se dice que la suma de dos vectores está definida por la *regla del paralelogramo.*

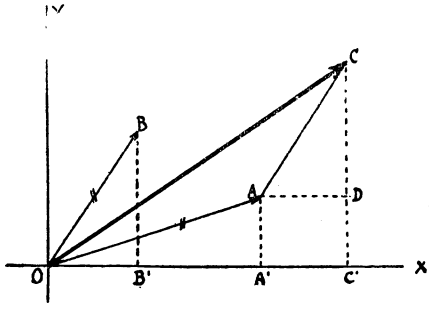


FIG. 139

REGLA. — *Para sumar dos vectores se lleva uno a continuación de otro con su propia magnitud, dirección y sentido, y el segmento que une el origen del primero con el extremo del segundo es la suma pedida.*

Para hallar el vector que representa la diferencia de dos números complejos, observamos que:

$$(a + b\,i) - (a' + b'\,i) = (a + b\,i) + (-a' - b'\,i);$$

es decir, *para restar dos números complejos se le suma al minuendo el opuesto al sustraendo.*

Así, en la figura 140, sean $\vec{OA}$ y $\vec{OB}$ los dos complejos dados. A partir de A llevemos $\vec{AC}$ igual, paralelo y de sentido contrario a $\vec{OB}$.

La diferencia pedida es $\vec{OC}$.

Para hacer la prueba basta sumar $\vec{OC}$ con $\vec{CA} = \vec{OB}$, y se ve que nos da el minuendo $\vec{OA}$.

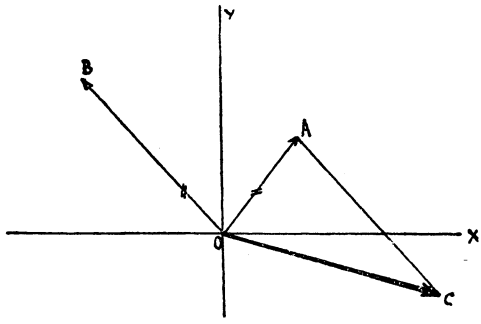


FIG. 140

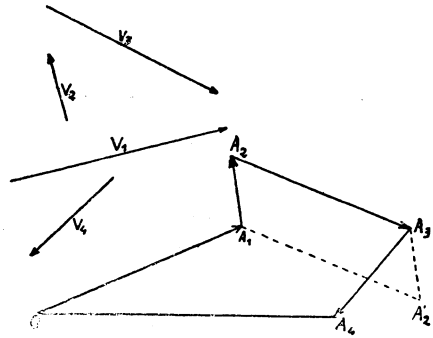


FIG. 141

225. **Suma geométrica de varios vectores.** — Dados los vectores $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$, $\vec{V}_4$, en el orden en que están escritos, la *suma geométrica* de estos vectores es el vector OA_4, obtenido trazando, a partir del punto O, $\vec{OA}_1 = \vec{V}_1$, $\vec{A_1A_2} = \vec{V}_2$, $\vec{A_2A_3} = \vec{V}_3$ y $\vec{A_3A_4} = \vec{V}_4$ (figura 141).

En efecto, las dos componentes de OA_4 son iguales a la suma algebraica de las respectivas componentes de los sumandos, lo que se comprueba del mismo modo que en la suma de dos vectores.

Ejemplo. — *Si* $\vec{V}_1 = 2 + 5\,i$, $\vec{V}_2 = 4 - 3\,i$, $\vec{V}_3 = -2 + 4\,i$ *son tres vectores en la forma binómica, expresar la suma* $\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$ *en las formas binómica y polar.*

Solución:

$$\vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 = (2 + 5\,i) + (4 - 3\,i) + (-2 + 4\,i) =$$
$$= (2 + 4 - 2) + (5 - 3 + 4)\,i = \mathbf{4 + 6\,i.}$$

Aplicando las fórmulas (3) del número 220, se obtiene:

$$r = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 7'21;$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{6}{4} = 1'5; \qquad \alpha = 56°\,18'.$$

Luego la suma es:

$$4 + 6\,i = \mathbf{7'21_{56°18'}}.$$

226. **Propiedades de la suma geométrica de vectores.** — La suma geométrica de varios vectores no varía cuando se permutan dos vectores sucesivos; si por ejemplo, se cambian $\vec{V}_2$ y $\vec{V}_3$, el punto A_2 de la figura 141 es reemplazado por el vértice A_2 pero nada se ha cambiado en los puntos A_1, A_3, A_4.

Por otra parte, un cambio arbitrario en el orden de los vectores $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$, $\vec{V}_4$, puede obtenerse siempre por una sucesión de cambios de cada dos vectores consecutivos; por ejemplo, se pasa del orden 1, 2, 3, 4 al orden 3, 1, 4, 2, efectuando sucesivamente los cambios siguientes 1, (3, 2), 4; (3, 1), 2, 4 y 3, 1, (4, 2).

Resulta, pues, que se pueden poner los vectores en un orden arbitrario sin cambiar su suma geométrica; luego ésta es *conmutativa,* cualquiera que sea el número de vectores componentes.

Si en la quebrada formada por los vectores componentes de la suma, coinciden el extremo del último vector y el origen del primero, la suma es nula; y, recíprocamente, si la suma es nula coinciden el origen del primer vector y el extremo del último.

También tenemos que en la figura 141 se pueden reemplazar los vectores $\vec{A_1A_2}$ y $\vec{A_2A_3}$ por su suma geométrica $\vec{A_1A_3}$; luego la suma

geométrica de varios vectores no cambia cuando se reemplaza dos de ellos consecutivos por su suma efectuada; esta propiedad se extiende a varios vectores consecutivos, y por la propiedad conmutativa, a varios vectores cualesquiera tomados entre los vectores componentes; luego la adición de vectores es *asociativa.*

La suma geométrica de varios vectores se llama también *resultante* de los mismos.

227. Cálculo algebraico de la suma geométrica de varios vectores. — Por varias razones puede suceder en un problema particular que no sea factible la adición geométrica de vectores; entonces se recurre a la *adición algebraica,* según hemos hecho en los ejemplos anteriores y en los dos que siguen:

Ejemplo 1. — *Tres fuerzas actúan sobre una partícula: una de* 10 *kg., que forma con O X un ángulo de* 30°*; otra de* 15 *kg., que forma con O X un ángulo de* 135°*; y la tercera de* 20 *kg., con un ángulo de* 240°*. Hallar la resultante.*

Solución: Tenemos (fig. 142), llamando V_x y V_y las componentes de la resultante, X e Y las componentes de la primera fuerza, etcétera:

$$V_x = X + X' + X'' = 10 \cos 30° + 15 \cos 135° + 20 \cos 240° =$$

$$= 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 15 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 20 \cdot \tfrac{1}{2} = -11'9$$

$$V_y = Y + Y' + Y'' = 10 \cdot \operatorname{sen} 30° + 15 \cdot \operatorname{sen} 135° + 20 \operatorname{sen} 240° =$$

$$= 10 \cdot \tfrac{1}{2} + 15 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 20 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -1'7.$$

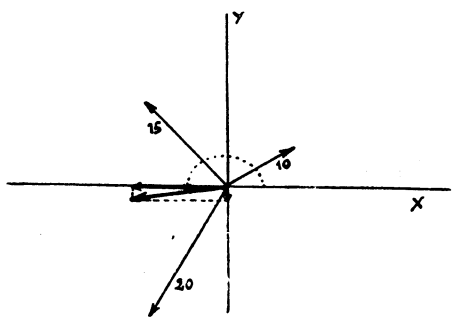


FIG. 142

Luego:

$$V = \sqrt{(11'9)^2 + (1'7)^2} = 12 \text{ kg.}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{V_y}{V_x} = \frac{-1'7}{-11'9} = 0'143;$$

$$\alpha = 188°$$

$\therefore$ el vector suma es **12 kg.**$_{188°}$.

Dicho vector resultante está en el tercer cuadrante por ser negativas las dos componentes.

Ejemplo 2. — *Calcular la suma de los vectores* $4_{30°}$, $6_{60°}$, $10_{135°}$, *referidas las direcciones al eje O X.*

Solución:

$$V_x = X + X' + X'' = 4 \cos 30° + 6 \cos 60° + 10 \cos 135° =$$

$$= 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 6 \cdot \tfrac{1}{2} - 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3'464 + 3 - 7'071 = -0'607$$

$$V_y = Y + Y' + Y'' = 4 \text{ sen } 30° + 6 \text{ sen } 60° + 10 \text{ sen } 135° =$$

$$= 4 \cdot \tfrac{1}{2} + 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 + 5'196 + 7'071 = 14'267$$

$$V = \sqrt{(-0'607)^2 + (14'267)^2} = 14'28$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{14'267}{-0'607} = -23'5; \qquad \alpha = 92° 26'$$

$\therefore$ el vector suma es $\mathbf{14'28_{92°26'}}$.

Dicho vector está en el segundo cuadrante, por ser positiva la primera componente y negativa la segunda.

Halle el alumno, gráficamente, la suma y compárela con el resultado anterior.

De la teoría anteriormente expuesta y de estos ejemplos se deducen las siguientes reglas para hallar la suma de cualquier número de vectores:

1.° *Se desdobla cada vector en los componentes paralelos* a O X y a O Y.

2.° *Se suman (algebraicamente) todos los componentes X para formar* V_x; *todos los componentes Y para formar* V_y.

3.° *Se compone* V_x *y* V_y *por la ley del paralelogramo; esto es, se traza el vector de magnitud:*

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2},$$

inclinado respecto a O X un ángulo α *tal que:*

$$\text{tg } \alpha = \frac{V_y}{V_x}.$$

El cuadrante en que está el vector (o sea α) se determina, como de ordinario, examinando los signos de V_x y V_y.

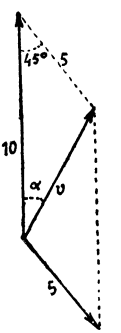


FIG. 143

Ejemplo 3. — *Un barco va hacia el Norte con la velocidad de* 10 *millas por hora; un hombre pasea sobre cubierta en dirección SE. con la velocidad de cinco millas por hora. ¿En qué dirección y con qué velocidad se mueve el hombre respecto de la superficie de la tierra?* (figura 143).

Solución: Por la ley del coseno:

$$v = \sqrt{100 + 25 - 2 \cdot 50 \cos 45°} = \sqrt{54'3} = \mathbf{7'4 \text{ mill./h.}}$$

Por la ley del seno:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{5} = \frac{\operatorname{sen} 45°}{7'4}; \quad \operatorname{sen}\alpha = 0'48; \quad \alpha = 29°.$$

Luego el hombre se mueve, efectivamente, en la dirección de 29° Este del Norte y con la velocidad de 7'4 millas/h.

EJERCICIOS

1. Eligiendo una recta base O X, representar, con una escala conveniente, los vectores $\vec{P} = 4_{20}°$, $\vec{Q} = 8_{35}°$, $\vec{R} = 6'5_{70}°$ y $\vec{T} = 4'8_{120}°$.

2. Usando los vectores del ejemplo 1, hallar, por trazado y medida, los vectores $\vec{P} + \vec{Q}$, $\vec{P} - \vec{Q}$, $\vec{R} + \vec{T}$, $\vec{R} - \vec{T}$, $\vec{P} + \vec{Q} + \vec{R}$, expresando cada uno en la forma polar.

3. Usando los vectores del ejemplo 1, hallar el vector suma:

$$\vec{S} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{R} + \vec{T},$$

expresándola en la forma polar, y verificar que ésta tiene el mismo valor que la suma:

$$\vec{S} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{Q}.$$

4. Hallar en la forma polar los vectores $\vec{L}$ y $\vec{M}$, en donde:

$$\vec{L} = \vec{P} - \vec{Q} + \vec{R} \quad \text{y} \quad \vec{M} = \vec{P} - \vec{Q} - \vec{R}.$$

5. Fuerzas de magnitudes 4 kg., 3 kg., 7 kg. y 10 kg., respectivamente, actúan en rectas $2y = x$, $y = x$, $y = 2x$, $y = 3x$. Hallar la resultante mediante una construcción geométrica.

6. A B C D es un cuadrado, y a lo largo de A B, A C, A D actúan fuerzas de magnitudes respectivas 2, 5 y 8 kg. Hallar su resultante: 1.°, gráficamente, 2.°, por cálculo.

7. Un cuerpo posee simultáneamente velocidades de 10 m./seg. hacia el Este, 8 m./seg. hacia el Norte y 6 m./seg. hacia el Noroeste. Hallar la velocidad resultante: 1.°, mediante un dibujo; 2.°, por el cálculo, indicando su dirección por su rumbo respecto al Norte.

8. Efectuar las siguientes adiciones y sustracciones:

1. $\sqrt{-9} - \sqrt{-4} + \sqrt{-36}$.
2. $\sqrt{-81} + \sqrt{-100} - \sqrt{-1}$.
3. $\sqrt{-64} - \sqrt{-4} - \sqrt{-16}$.
4. $\sqrt{-49} - 2\sqrt{-1} + \sqrt{-121}$.
5. $(10 - 3i) + (6 + 5i)$.

9. Simplificar $(8 - 5\sqrt{-9}) - (12 + 2\sqrt{-16})$.

10. De $3m - 2ni$ restar $m + 3ni$.

11. En los ejercicios siguientes, hallar la suma y diferencia de los pares de complejos dados, en las formas binómica y polar:

1.° $-2+i;\ 3+2i$.

2.° $5-2i;\ 3+i$.

3.° $-2-3i;\ 4-2i$.

4.° $i;\ -2+3i$.

5.° $-1;\ -4-5i$.

6.° $-i;\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$.

7.° $3+4i;\ -2+4i$.

8.° $+1;\ i$.

9.° $1-3i;\ 3-i$.

10.° $-6-2i;\ -2+4i$.

12. Si $\vec{P}=2+3i$, $\vec{Q}=1-2i$, $\vec{R}=3+4i$ son tres vectores en forma cartesiana, hallar: 1.°, $\vec{P}+\vec{Q}$; 2.°, $\vec{P}-\vec{Q}$; 3.°, $\vec{P}+\vec{Q}+\vec{R}$; 4.°, $\vec{P}-\vec{Q}+\vec{R}$, expresando cada uno de ellos, primero en la forma binómica, y luego en la forma polar.

13. Si $\vec{OA}=2+i$, $\vec{OB}=3+4i$, $\vec{OC}=1+5i$, escribir los vectores $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CA}$ en la forma binómica, y deducir las longitudes AB, BC, CA.

14. Un hombre puede remar en una barca con la velocidad de 5 millas por hora. Si desea atravesar un río de dos millas de ancho, que tiene una corriente de cuatro millas por hora, y quiere ir directamente a la orilla opuesta, ¿en qué dirección debe remar y cuánto tiempo tardará en atravesarlo?

15. Sobre la cubierta de un barco que navega hacia el Sur, con la velocidad de 3'10 m./seg. un hombre va en la dirección de 30° al Este del Sur con la velocidad de 1'8 m./seg. Si la cubierta tiene 4'70 m., ¿en qué dirección y con qué velocidad se mueve respecto a la Tierra?

16. La corriente de un río que va hacia el Sur tiene una velocidad de 5 millas por hora. Un barco que se dirige al Este navega con la velocidad de 10 millas por hora. Un hombre, sobre la cubierta, puede correr con la velocidad de 9'144 metros/segundo. ¿Puede quedarse este hombre en reposo respecto a la superficie de la Tierra?

17. Hallar la resultante de un sistema de fuerzas coplanarias $F_1 = 10$ kg., $F_2 = 20$ kg., $F_3 = 8$ kg., $F_4 = 15$ kilogramos, actuando como se indica en la figura 144, en donde $\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{4}$.

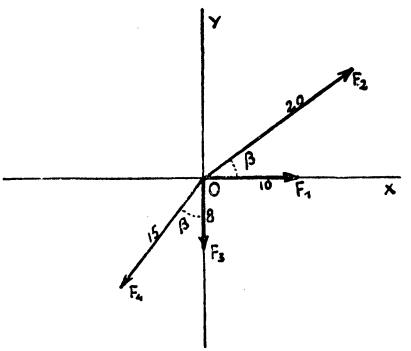


FIG. 144

18. Seis fuerzas de 1, 2, 3, 4, 5, 6 kg., respectivamente, actúan en el mismo punto, formando ángulos de 60° cada dos consecutivos. Hallar su resultante.

31

Multiplicación y división de números complejos

228. **Multiplicación de números complejos.** — Los números complejos se multiplican como polinomios de primer grado en *i*, teniendo presente que $i^2 = -1$. Así:

$$(a + b\,i)\,.\,(a' + b'\,i) = a\,a' + a\,b'\,i + b\,a'\,i + b\,b'\,i^2 = \\ = a\,a' - b\,b' + (a\,b' + b\,a')\,i.$$

Ejemplo 1. — *Simplificar* $\sqrt{-16}\,.\,\sqrt{-9}\,.\,\sqrt{-25}$.
Solución:

$$\sqrt{-16}\,.\,\sqrt{-9}\,.\,\sqrt{-25} = 4\,i\,.\,3\,i\,.\,5\,i = 60\,i^3 = 60\,i^2\,.\,i = -60\,i.$$

Cada número imaginario se ha expresado primero en la forma binómica. Luego se han multiplicado.

Ejemplo 2. — *Hallar* $(3 + 4\,i)\,(5 - 3\,i)$.
Solución:

$$\begin{array}{r} 3 + 4\,i \\ 5 - 3\,i \\ \hline 15 + 20\,i \\ 12 - 9\,i \\ \hline \mathbf{27 + 11\,i} \end{array}$$

ya que:

$$4\,i\,.\,(-3\,i) = -12\,i^2 = -12\,.\,(-1) = 12.$$

COROLARIO. — De la regla dada para multiplicar complejos se deduce que el *producto de dos números complejos conjugados es un número real igual a la suma de los cuadrados de los componentes.*
En efecto:

$$(a + b\,i)\,(a - b\,i) = a^2 - (b\,i)^2 = a^2 - b^2\,i^2 = a^2 + b^2.$$

Luego el producto de las raíces de una ecuación de segundo grado es *siempre un número real.*

229. **Potencias de la unidad imaginaria.** — Teniendo presente que $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$, las potencias de i son:

$$i = \sqrt{-1} = i;$$
$$i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1;$$
$$i^3 = (\sqrt{-1})^3 = i\,i^2 = -i;$$

$$i^4 = (\sqrt{-1})^4 = i^2 i^2 = 1;$$
$$i^5 = (\sqrt{-1})^5 = i^4 i = i;$$
$$i^6 = (\sqrt{-1})^6 = i^4 i^2 = -1, \text{ etcétera.}$$

(Dedúzcase la regla).

Luego las sucesivas potencias de i tienen sólo cuatro valores diferentes: i, — 1, — i, + 1, y éstas se repiten periódicamente. Así:

$$i = i^5 = i^9 = i^{13} = \text{etc.}, = i;$$
$$i^2 = i^6 = i^{10} = i^{14} = \text{etc.}, = -1;$$
$$i^3 = i^7 = i^{11} = i^{15} = \text{etc.}, = -1;$$
$$i^4 = i^8 = i^{12} = i^{16} = \text{etc.}, = +1.$$

230. **División de números complejos.** — Para dividir números complejos hay que hacer desaparecer el factor i del divisor, multiplicando ambos términos por un número conveniente, como se indica en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. — *Efectuar el cociente* $\dfrac{6}{\sqrt{-4}}$.

Solución:

$$\frac{6}{\sqrt{-4}} = \frac{6}{2i} = \frac{6i}{2i^2} = \frac{6i}{-2} = -3i.$$

Hemos multiplicado los dos términos de la fracción por i y luego hemos simplificado el resultado.

Ejemplo 2. — *Efectuar la siguiente división:*

$$\frac{2-\sqrt{-9}}{3+\sqrt{-16}}.$$

Solución:

$$\frac{2-\sqrt{-9}}{3+\sqrt{-16}} = \frac{2-3i}{3+4i} = \frac{(2-3i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} =$$
$$= \frac{-6-17i}{25} = -\frac{6}{25} - \frac{17}{25}i.$$

El procedimiento seguido en este último ejemplo es general:

Para dividir dos complejos se multiplican dividendo y divisor por el conjugado del divisor. Así se consigue eliminar el factor i del divisor.

231. **Multiplicación en la forma factorial.** — Sean los factores complejos en forma factorial:

$$r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha); \quad (1)$$
$$r'(\cos\alpha' + i \operatorname{sen}\alpha'). \quad (2)$$

Multiplicando (1) y (2) y sustituyendo i^2 por -1, tenemos:

$$rr'(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)(\cos\alpha' + i\,\text{sen}\,\alpha') = rr'[\cos\alpha\cos\alpha' - \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\alpha' + i(\text{sen}\,\alpha\cos\alpha' + \cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha')] = \mathbf{rr'[\cos(\alpha+\alpha') + i\,\text{sen}(\alpha+\alpha')]}. \quad (3)$$

Esta expresión dice que el *módulo de un producto de dos complejos es el producto de sus módulos, y el argumento del producto es la suma de sus argumentos.*

Ejemplo — *Dados* $1 + iy - 1 + i\sqrt{3}$, *reducirlos a sus respectivas formas factoriales y calcular su producto.*

Solución:

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}; \quad r' = \sqrt{1^2 + 3} = 2;$$

$$\alpha = \text{arc tg}\,\frac{1}{1} = \text{arc tg}\,1; \quad \alpha' = \text{arc tg}\,\frac{\sqrt{3}}{-1} = \text{arc tg}\,(-\sqrt{3}).$$

Luego:

$$\alpha = 45^\circ \quad \text{y} \quad \alpha' = 120.$$

Los dos complejos en la forma factorial son:

$$\sqrt{2}\,(\cos 45^\circ + i\,\text{sen}\,45^\circ);$$
$$2\,(\cos 120^\circ + i\,\text{sen}\,120^\circ).$$

Sustituyendo los valores hallados en la fórmula (3), se obtiene como producto:

$$2\sqrt{2}\,[\cos(45^\circ + 120^\circ) + i\,\text{sen}\,(45^\circ + 120^\circ)] = \mathbf{2\sqrt{2}\,(\cos 165^\circ + i\,\text{sen}\,165^\circ)}.$$

232. **División en la forma factorial.** — Tratamos de hallar el cociente:

$$\frac{r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)}{r'(\cos\alpha' + i\,\text{sen}\,\alpha')} \quad (4)$$

Si multiplicamos numerador y denominador por $\cos\alpha' - i\,\text{sen}\,\alpha'$ tenemos, después de reducir y reemplazar i^2 por -1:

$$\frac{r}{r'}\,\frac{\cos\alpha\cos\alpha' + \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\alpha' + i(\text{sen}\,\alpha\cos\alpha' - \cos\alpha\,\text{sen}\,\alpha')}{\cos^2\alpha' + \text{sen}^2\alpha'} =$$

$$= \frac{r}{r'}\,\mathbf{[\cos(\alpha-\alpha') + i\,\text{sen}(\alpha-\alpha')]}, \quad (5)$$

ya que $\cos^2\alpha' + \text{sen}^2\alpha' = 1$.

La expresión (5) nos dice que *el módulo del cociente de dos números complejos es el cociente de sus módulos, y que el argumento del cociente es igual al argumento del dividendo menos el argumento del divisor.*

233. Obtención gráfica del producto y del cociente. — La *obtención gráfica* del producto de dos factores, representados por los puntos A y B (fig. 145), se consigue tomando sobre O X una longitud O D igual a la unidad y construyendo sobre O B, como lado homólogo de O D, el triángulo O B C semejante al triángulo O D A. La semejanza de triángulos da, en efecto:

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OD};$$

de donde:

$$OA \cdot OB = OC \cdot 1;$$

o sea:

$$rr' = OC.$$

Además:

$$\widehat{XOC} = \widehat{XOB} + \widehat{BOC} = \alpha + \alpha'.$$

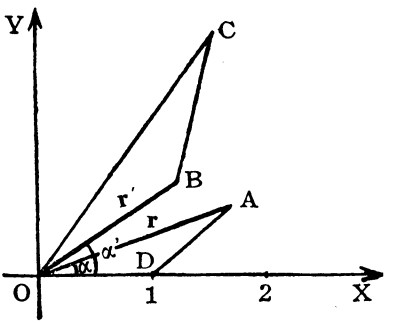


FIG. 145

Luego el punto C representa el producto pedido, ya que cumple las condiciones demostradas en el número 231 para el producto de dos números.

De la construcción del producto se deduce que, dados O C y O A, para determinar el cociente del primero por el segundo, basta construir sobre O C, como lado homólogo de O A, un triángulo semejante al O A D, obtenido al unir el punto A del divisor con el extremo de la unidad (fig. 145).

EJERCICIOS

Efectuar las siguientes divisiones:

1. $\dfrac{5}{i}$.
2. $\dfrac{3}{2i}$.
3. $\dfrac{10}{\sqrt{-4}}$.
4. $\dfrac{21}{\sqrt{-9}}$.
5. $\dfrac{4i}{\sqrt{-4}}$.
6. $\dfrac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-9}}$.
7. $\dfrac{\sqrt{-100}}{\sqrt{-25}}$.
8. $\dfrac{2}{\sqrt{-x^2}}$.
9. $\dfrac{-x}{\sqrt{-9x^2}}$.
10. $\dfrac{2\sqrt{-25a^4}}{3\sqrt{-16a^2}}$.
11. $\dfrac{\sqrt{-25x^8}}{\sqrt{-49x^6}}$.
12. $\dfrac{2}{1+3i}$.
13. $\dfrac{1+2i}{1-2i}$.
14. $\dfrac{1-\sqrt{-4}}{1+\sqrt{-9}}$.
15. $\dfrac{1}{5+2\sqrt{-5}}$.
16. $\dfrac{-n}{\sqrt{-n}}$.

Efectuar las siguientes divisiones, dibujando el dividendo, el divisor y el cociente.

17. $\dfrac{2\,i}{1+i}$. 18. $\dfrac{1+i}{1-i}$. 19. $\dfrac{-5\,i}{-4-3\,i}$. 20. $\dfrac{1-2\,i}{-2-i}$.

Verificar las operaciones indicadas:

21. $3(\cos 40^\circ + i \operatorname{sen} 40^\circ) \times 5(\cos 70^\circ + i \operatorname{sen} 70^\circ)$.
22. $6(\cos 70^\circ + i \operatorname{sen} 70^\circ) \times 2(\cos 40^\circ + i \operatorname{sen} 40^\circ)$.
23. $6(\cos 70^\circ + i \operatorname{sen} 70^\circ) : 2(\cos 40^\circ + i \operatorname{sen} 40^\circ)$.

En los problemas siguientes, reducir los números complejos dados a sus respectivas formas polares, hallar el producto y cociente y trazar la representación gráfica de éstos.

24. $\sqrt{3} - i$; $1 + i$.
25. $-1 + i\sqrt{3}$; $\sqrt{3} + i$.
26. $-\sqrt{3} - i\sqrt{3}$; $1 + i$.
27. $\sqrt{2} - i\sqrt{2}$; $-i$.
28. 2; $1 + i\sqrt{3}$.
29. $1 - i\sqrt{3}$; $4 + 4\sqrt{3}\,i$.
30. $3 + 4\,i$; $4 - 3\,i$.

Efectuar:

31. $\sqrt{-25} \cdot \sqrt{-4}$.
32. $\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-16}$.
33. $\sqrt{-36} \cdot \sqrt{-49}$.
34. $\sqrt{-81} \cdot \sqrt{-64}$.
35. $\sqrt{-100} \cdot \sqrt{-1}$.
36. $\sqrt{-a^2} \cdot \sqrt{-b^2}$.
37. $\sqrt{-6} \cdot \sqrt{-10}$.
38. $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-9} \cdot \sqrt{-25}$.
39. $\sqrt{-16} \cdot \sqrt{-49} \cdot \sqrt{-1/4}$.
40. $\sqrt{-1/9} \cdot \sqrt{-81} \cdot \sqrt{-36}$.
41. $\sqrt{-5} \cdot \sqrt{-7} \cdot \sqrt{-2}$.
42. $\sqrt{-n} \cdot \sqrt{-n^3} \cdot \sqrt{-n^5}$.
43. $(1 + \sqrt{-2})(1 - \sqrt{-2})$.
44. $(\sqrt{-4} + 3)(\sqrt{-4} - 3)$.
45. $(\sqrt{-9} - \sqrt{-16})(\sqrt{-4} + \sqrt{-1})$.
46. $(\sqrt{-2} + \sqrt{-3})(\sqrt{-2} - \sqrt{-3})$.
47. $(2\sqrt{-4} + 3\sqrt{-9})(2\sqrt{-4} + 3\sqrt{-9})$.
48. $(x\sqrt{-x} - y\sqrt{-y})(x\sqrt{-x} - y\sqrt{-y})$.

En cada uno de los siguientes ejercicios trazar los números complejos y hallar su módulo. Hallar el producto de cada par de números y representar el resultado.

49. $3 - 4\,i$; $2 + 2\,i$.
50. $-5 + i$; $2 - 3\,i$.
51. $4 + 3\,i$; $-2\,i$.
52. $12 - 5\,i$; $5 + 12\,i$.
53. 3; $-4 + 3\,i$.
54. $-1 - 3\,i$; $3 - 2\,i$.
55. $5 + 3\,i$; $-2 + 4\,i$.
56. $-5\,i$; $-4 - 3\,i$.
57. $1 - 2\,i$; $-2 - i$.
58. $3 - 5\,i$; $3 + 5\,i$.

59. Hallar la suma: $1 + i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{53}$.

32

Potencias y raíces de números complejos

234. **Potencia n-sima de un complejo.** — La potencia n-sima del complejo:

$$r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)$$

es el producto de n factores iguales a esta expresión; es decir:

$$[r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)]^n = r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)\,.\,r(\cos\alpha + i\,\text{sen}\,\alpha)\,\ldots$$
$$= (rrr\ldots)\,[\cos(\alpha + \alpha + \alpha + \ldots) + i\,\text{sen}\,(\alpha + \alpha + \alpha + \ldots)] =$$
$$= \mathbf{r^n\,(\cos n\,\alpha + i\,\text{sen}\,n\,\alpha).}$$

Este resultado se llama *fórmula de Moivre,* y se enuncia así:

Para elevar un número complejo a una potencia se eleva el módulo al exponente de la potencia y se multiplica el argumento por dicho exponente.

Como aplicación de la fórmula de Moivre, indicaremos el medio de calcular cos nx, sen nx en función de cos x y sen x, y de sus potencias.

Para ello se desarrolla el primer miembro de la fórmula de Moivre, por multiplicaciones sucesivas, y se reducen los términos semejantes. Así suponiendo $n = 3$ y $r = 1$, la fórmula de Moivre se convierte en:

$$(\cos x + i\,\text{sen}\,x)^3 = \cos 3x + i\,\text{sen}\,3x;$$

o sea:

$$\cos^3 x + 3i\cos^2 x\,\text{sen}\,x - 3\cos x\,\text{sen}^2 x - i\,\text{sen}^3 x = \cos 3x + i\,\text{sen}\,3x.$$

Igualando los términos reales de ambos miembros y haciendo lo mismo con los términos imaginarios (n.º 221), resultan las dos igualdades siguientes:

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x\,\text{sen}^2 x; \quad (1)$$
$$\text{sen}\,3x = \cos^2 x\,\text{sen}\,x - \text{sen}^3 x \quad (2)$$

Sustituyendo en la fórmula (1) $\text{sen}^2 x$ por $1 - \cos^2 x$ y en la fórmula (2) $\cos^2 x$ por $1 - \text{sen}^2 x$, resulta:

$$\mathbf{\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x} \quad (3)$$
$$\mathbf{\text{sen}\,3x = 3\,\text{sen}\,x - 4\,\text{sen}^3 x} \quad (4)$$

que son las igualdades que buscábamos.

Ejemplo 1. — *Hallar el cubo del complejo* $3 + 4i$.

Solución. — El módulo, $r = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

Luego:

$$r^3 = 5^3 = 125.$$

El argumento:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{b}{a} = \frac{4}{3}.$$

Luego: $$\alpha = 53^\circ\ 8'$$
$$\therefore\ 3\alpha = 159^\circ\ 24'.$$

De aquí que:
$$(3 + 4\,i)^3 = [5\ (\cos 53^\circ\ 8' + i \operatorname{sen} 53^\circ\ 8')]^3 =$$
$$= \mathbf{125\ (\cos 159^\circ\ 24' + i \operatorname{sen} 159^\circ\ 24').}$$

También pudo obtenerse por la fórmula del binomio de Newton, del siguiente modo:
$$(3 + 4\,i)^3 = 27 + 27 \cdot 4\,i + 9 \cdot 16\,i^2 + 64\,i^3 =$$
$$= 27 + 108\,i - 144 - 64 \cdot i = \mathbf{-117 + 44\,i.}$$

Ejemplo 2. — *Hallar la potencia* $(1 + i)^6$.

Aplicando la regla del binomio de Newton:
$$(1 + i)^6 = 1^6 + 6 \cdot 1^5 \cdot i + 15 \cdot 1^4 \cdot i^2 + 20 \cdot 1^3 \cdot i^3 + 15 \cdot 1^2 \cdot i^4 + 6 \cdot 1 \cdot i^5 + i^6 =$$
$$= 1 + 6\,i - 15 - 20\,i + 15 + 6\,i - 1 = \mathbf{-8\,i.}$$

235. Raíces de los números complejos. — Representemos por:
$$\mathbf{x = r\ (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)}$$
la raíz n-sima de la expresión:
$$\mathbf{R\ (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha).}$$

O sea, se verificará que:
$$\sqrt[n]{R\ (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)} = r\ (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi).$$

Luego, por definición, tendremos:
$$[r\ (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)]^n = R\ (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha);$$
$$r^n\ (\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi) = R\ (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha).$$

Para que se satisfaga esta igualdad es necesario que (núm. 221)
$$r^n = R \quad \text{y} \quad n\varphi = \alpha + 2k\pi,$$
pudiendo recibir k todos los valores enteros; de donde:
$$r = \sqrt[n]{R} \quad \text{y} \quad \varphi = \frac{\alpha + 2k\pi}{n} = \frac{\alpha}{n} + K\frac{2\pi}{n}.$$

Luego la raíz n-sima de la expresión propuesta es:
$$\mathbf{x = r\ (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) = \sqrt[n]{R}\left[\cos\left(\frac{\alpha}{n} + K\frac{2\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{n} + K\frac{2\pi}{n}\right)\right]} \qquad (5)$$

Se ve que, dando a k los valores
$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ (n-1),$$

los argumentos de la raíz son distintos entre sí, mientras que para $k = n, n + 1 \ldots$ resultan argumentos que difieren de los ya obtenidos en 2π o en un múltiplo de 2π, y no dan, por consiguiente, raíces nuevas. Luego:

Todo número complejo tiene n *raíces* n-simas *distintas, cuyo módulo es igual a la raíz* n-sima *del módulo del radicando y cuyos argumentos son:*

$$\frac{\alpha}{n}, \frac{\alpha}{n} + 1 \cdot \frac{2\pi}{n}, \frac{\alpha}{n} + 2 \cdot \frac{2\pi}{n}, \frac{\alpha}{n} + 3 \cdot \frac{2\pi}{n}, \ldots$$

$$\ldots, \frac{\alpha}{n} + (n-1)\frac{2\pi}{n}.$$

236. Representación geométrica. Se pueden representar geométricamente los n valores de la raíz n-sima de un número complejo trazando una circunferencia de radio $\sqrt[n]{R}$; luego dividiendo esta circunferencia en n partes iguales a partir de un punto P_0 de argumento $\frac{\alpha}{n}$; los puntos de división representan las raíces (figura 146).

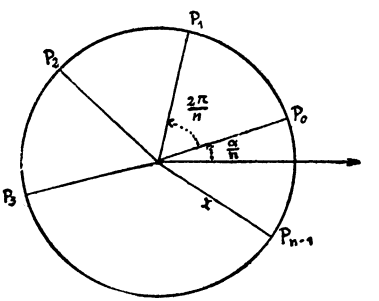


FIG. 146

Ejemplo 1. — *Resolver la ecuación* $z^3 = 1$.

Solución. — Será $z = \sqrt[3]{1}$.

Hallemos el módulo y argumento del radicando 1:

$$R = \sqrt{1^2 + 0} = 1; \quad \alpha = \operatorname{arc\,tg} 0 = 0^\circ.$$

Luego:

$$R = 1,\ n = 3,\ \alpha = 0^\circ,\ \frac{2\pi}{n} = 120^\circ.$$

Para la raíz: $r = \sqrt[3]{1} = 1$; $\varphi = 0^\circ + 120^\circ$ K.

Luego de la fórmula (5), haciendo $k = 0, 1, 2$ sucesivamente, resultan las tres raíces:

$$x_0 = 1\,(\cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ) = 1;$$

$$x_1 = 1\,[\cos(0^\circ + 120^\circ) + i \operatorname{sen}(0^\circ + 120^\circ)] = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i;$$

$$x_2 = 1\,[\cos(0^\circ + 240^\circ) + i \operatorname{sen}(0^\circ + 240^\circ)] = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i.$$

$\therefore$ Las tres raíces cúbicas de la unidad son, pues:

$$1, \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i, \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i.$$

y están representadas en la figura 147 por los puntos P_0, P_1 y P_2.

Ejemplo 2. — *Hallar las tres raíces cúbicas de* $1 + i$ (figura 148).
Solución: Para el radicando:

$$\alpha = \text{arc tg } 1 = 45^\circ$$

$$a = 1, \quad b = 1, \quad n = 3, \quad R = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Para la raíz: $r = \sqrt[3]{\sqrt{2}} = \sqrt[6]{2}$; $\varphi = \dfrac{45^\circ}{3} + \dfrac{360^\circ K}{3} = 15^\circ + 120^\circ K$.

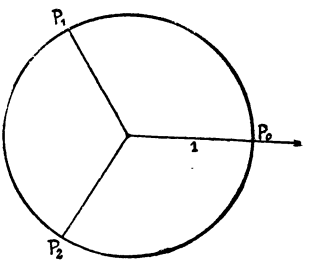


FIG. 147

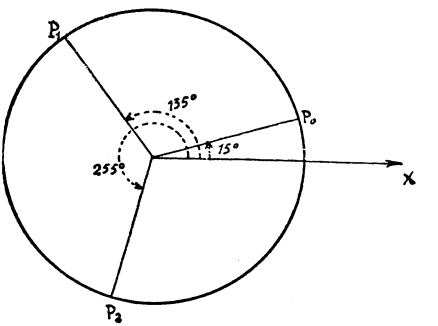


FIG. 148

Luego de la fórmula (5), haciendo $k = 0, 1, 2$ sucesivamente, resulta:

$$x_0 = \sqrt[6]{2}\,(\cos 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ) = \sqrt[6]{2}_{15^\circ}.$$

$$x_1 = \sqrt[6]{2}\,[\cos(15^\circ + 120^\circ) + i \operatorname{sen}(15^\circ + 120^\circ)] = \sqrt[6]{2}\,(\cos 135^\circ +$$

$$+ i \operatorname{sen} 135^\circ) = \sqrt[6]{2}_{135^\circ}$$

$$x_2 = \sqrt[6]{2}\,[\cos(15^\circ + 240^\circ) + i \operatorname{sen}(15^\circ + 240^\circ)] = \sqrt[6]{2}\,(\cos 255^\circ +$$

$$+ i \operatorname{sen} 255^\circ) = \sqrt[6]{2}_{255^\circ}.$$

Ejemplo 3. — *Hallar las raíces cuadradas de* i.
Solución: En este caso, para el radicando:

$$a = 0, \quad b = 1, \quad n = 2, \quad \alpha = \text{arc tg } \frac{1}{0} = \text{arc tg } \infty = 90^\circ; \quad R = 1.$$

Para la raíz: $r = \sqrt{1} = 1$; $\varphi = \frac{90^\circ}{2} + \frac{360^\circ K}{2} = 45^\circ + 180^\circ K$.

Luego de la fórmula (5), haciendo $k = 0$, resulta:

$$x_0 = 1\,(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i;$$

$$x_1 = 1\,[\cos (45^\circ + 180^\circ) + i \operatorname{sen} (45^\circ + 180^\circ)] = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i.$$

237. Area orientada. — Dado un triángulo A B C (figura 149), se sabe que su *área* vale:

$$S = \frac{A\,B \,.\, B\,C \,.\, \operatorname{sen} B}{2}.$$

Pues bien, se conviene en atribuir a este área el signo +, si recorremos los lados A B y B C en el sentido positivo, o sea el contrario

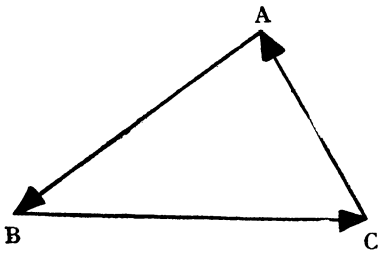


FIG. 149

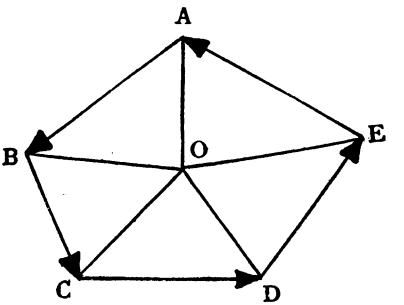


FIG. 150

al movimiento de las agujas del reloj; y el signo —, si los recorremos en el sentido negativo C B A. Así se obtiene el concepto de *área orientada*.

Análogamente, dado un polígono cualquiera A B C D E (fig. 150), lo descomponemos en triángulos uniendo sus vértices con un punto interior O. La suma de las áreas de estos triángulos, orientados en sentido positivo, es igual al área del polígono con signo +. Si tomamos los triángulos orientados en sentido negativo, la suma de sus áreas da el área del polígono con signo —.

EJERCICIOS

Efectuar las potencias siguientes:

1. $[7(\cos 18^\circ + i \operatorname{sen} 18^\circ)]^3$.
2. $(1 + i)^{10}$.
3. $(5 - 5i)^4$.
4. $(\cos 22^\circ + i \operatorname{sen} 22^\circ)^8$.
5. $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^3$.
6. $[10(\cos 70^\circ + i \operatorname{sen} 70^\circ)]^{-6}$.
7. $(3 + 2i)^2$.
8. $(3 + i)^3$.
9. $(5 - 7i)^3$.
10. $(52 + 16i)^2$.

Elevar los siguientes números complejos a la potencia indicada:

11. $(-1 + i)^4$.
12. $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^5$.
13. $(\sqrt{3} - i)^3$.
14. $(-1 - i\sqrt{3})^6$.
15. $(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{3}i)^3$.
16. $(-2 - 2\sqrt{3}i)^3$.
17. $(3 - i\sqrt{3})^4$.
18. $(-3 + 3i)^5$.
19. $(-2 - 2i)^5$.
20. $(2\sqrt{3} + 2i)^3$.

Extraer las raíces que se indican:

21. $\sqrt[3]{2 - 2i}$.
22. $\sqrt[3]{3 + 3\sqrt{3}i}$.
23. $\sqrt{3 + \sqrt{3}i}$.
24. $\sqrt{-1 + i}$.
25. $\sqrt{8 - 8\sqrt{3}i}$.
26. $\sqrt[3]{4 + 4\sqrt{3}i}$.
27. $\sqrt{-7\sqrt{3} + 7i}$.
28. $\sqrt{-4\sqrt{3} + 4i}$.
29. $\sqrt{-4}$.
30. $\sqrt[3]{8}$.
31. $\sqrt[3]{8i}$.
32. $\sqrt[4]{-64}$.
33. $\sqrt[5]{32}$.
34. $\sqrt[6]{64}$.
35. $\sqrt{-8}$.
36. $\sqrt[5]{-32}$.

Usando la regla del binomio de Newton, efectuar las potencias siguientes:

37. $(-1 + i)^2$.
38. $(\sqrt{2} + i\sqrt{2})^3$.
39. $(3 - 2i)^3$.
40. $(5 + 7i)^2$.
41. $(-4 - 6i)^2$.
42. $(30 + i)^3$.

Resolver las ecuaciones siguientes:

43. $x^3 + 64 = 0$.
44. $y^4 - 256 = 0$.
45. $z^5 + 32 = 0$.
46. $x^8 - 1 = 0$.
47. $y^7 + 1 = 0$.
48. $z^6 - 729 = 0$.

Efectuar las ecuaciones siguientes:

49. $[2(\cos 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ)]^4$.
50. $[4(\cos 6^\circ + i \operatorname{sen} 6^\circ)]^7$.
51. $\sqrt{\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ}$.
52. $\sqrt[6]{729(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)}$.

EDICIONES S. M.

LIBROS DE TEXTO PARA EL BACHILLERATO

1.er AÑO

- RELIGION
- LENGUA ESPAÑOLA
- GEOGRAFIA DE ESPAÑA
- MATEMATICAS
- DIBUJO

2.° AÑO

- RELIGION
- LENGUA ESPAÑOLA
- GEOGRAFIA UNIVERSAL
- MATEMATICAS
- FRANCES
- DIBUJO

3.er AÑO

- RELIGION
- LATIN-GRAMATICA
- LATIN-METODO
- CIENCIAS NATURALES
- MATEMATICAS
- DIBUJO

4.° AÑO

- RELIGION
- LITERATURA ESPAÑOLA
- HISTORIA
- MATEMATICAS
- FISICA-QUIMICA
- MATEMATICAS (COMPENDIO)
- PRACTICAS DE QUIMICA

5.° AÑO

- RELIGION
- CIENCIAS NATURALES
- MATEMATICAS
- QUIMICA
- DIBUJO
- PRACTICAS DE QUIMICA

6.° AÑO

- RELIGION
- MATEMATICAS
- FISICA
- DIBUJO

C. PREUNIVERSITARIO

BIOLOGIA
MATEMATICAS
FISICA
PROBLEMAS DE FISICA Y CLAVE DETALLADA
PROBLEMAS DE MATEMATICAS Y CLAVE DETALLADA
PRACTICAS DE FISICA

MATEMATICAS 5.° CURSO

Aprobado por el Ministerio de Educación Nacional con fecha 23 de Octubre de 1957 (B. O. del 4 de Noviembre de 1957)

Precio: 60 ptas. **Año 1960**

EDICIONES S. M. - GENERAL TABANERA, 37 - MADRID (19)